Algèbre Linéaire)
Séries Numériques
Intégration)

Simulation DS
Spécial Confinement

PROBLÈME
Diverses applications de la formule de Taylor avec reste intégrale

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Pour tout $(r, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leqslant r$, on note $\binom{r}{k}$ le coefficient binomial défini par $\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Formule de Taylor avec reste intégrale ; application

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $(a, b) \in I^2$; on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

1.1. Formule de Taylor avec reste intégrale

1.1.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

1.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1.2. Application au calcul de la somme d'une série

On considère la fonction $\psi :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t > -1,\ \psi(t) = \ln(1+t).$$

1.2.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ψ est n fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que

$$\forall\, t > -1,\ \psi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

1.2.2. Justifier que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

1.2.3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale (1) à la fonction ψ sur un intervalle à préciser, déterminer la somme de la série précédente.

2$^{\text{ème}}$ Partie
Application au développement en série entière d'une fonction absolument monotone

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-a, a[$, avec $a > 0$, vérifiant :

$$\forall\, (n, x) \in \mathbb{N}\times]-a, a[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}\times]-a, a[$, on pose $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\, du$.

2.1. Montrer que pour tout $x \in]-a, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + R_n(x).$$

2.2. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(x)$.

2.3. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est convergente.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $y \in]x, a[$,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

2.5. En déduire que, pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

2.6. Montrer que, pour tout $x \in]-a, 0[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ puis en déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente de somme $f(x)$.

3ème Partie
Étude d'une équation différentielle linéaire

Dans cette partie, on s'interesse à l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0. \tag{E}$$

On désigne par Σ l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que φ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

3.1. Montrer que Σ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

3.2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x}.$$

3.2.1. Montrer que la fonction f_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, $\lambda^4 = 1$.

3.2.2. Préciser toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) de la forme f_λ, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.3. Un minorant de la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ

3.3.1. Les notations étant celles de la question **3.2.** précédente ; montrer que si λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 sont des complexes deux à deux distincts alors la famille $(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}, f_{\lambda_4})$ est libre.

3.3.2. En déduire que le $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est de dimension $\geqslant 4$.

3.4. Étude d'une application linéaire

Soit t_0 un réel ; on considère l'application $\Delta : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^4$, $\varphi \longmapsto \big(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)\big)$.

3.4.1. Vérifier que Δ est une application linéaire.

Dans la suite, on cherche à établir que l'application Δ est injective ; pour cela on considère une application $g \in \Sigma$ telle que $\Delta(g) = (0,0,0,0)$, c'est à dire que $g^{(k)}(t_0) = 0$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$.

3.4.2. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \displaystyle\int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} g(s)\,\mathrm{d}s$.

3.4.3. Soit t un réel distinct de t_0 ; on note I_t le segment d'extrémités t_0 et t et on pose

$$M_t = \sup_{s\in I_t} |g(s)|, \quad \alpha_t = \frac{|t-t_0|^3}{6}.$$

(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_t$,

$$|g(x)| \leqslant M_t\, \alpha_t^k \frac{|x-t_0|^k}{k!}.$$

(ii) Justifier que la suite $\left(\alpha_t^n \frac{|t-t_0|^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

(iii) En déduire que $g(t) = 0$.

3.4.4. Conclure que Δ est injective et que la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est égale à 4 puis justifier que

$$\Sigma = \left\{x \longmapsto a\,e^x + b\,e^{-x} + c\,e^{ix} + d\,e^{-ix}\ ; \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\right\}.$$

$4^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une équation intégrale

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **continues** *telles que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Soit donc $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une telle application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \int_0^x (x-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.1. Montrer que la fonction g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.

4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4.2.1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.2.2. En déduire que la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g_n' = n\, g_{n-1}$.

4.3. Recherche d'une équation différentielle vérifiée par f

4.3.1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = x + \dfrac{1}{6}\, g_3(x)$.

4.3.2. Justifier que la fonction f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0.$$

4.3.3. En déduire qu'il existe des complexes a, b, c et d telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\, e^{x} + b\, e^{-x} + c\, e^{ix} + d\, e^{-ix}.$$

4.4. Déterminer les valeurs prises par $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$ et en déduire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\Big(\sin x + \sinh x\Big),$$

où sinh désigne la fonction sinus hyperbolique.

4.5. Synthèse : Vérifier que la solution trouvée à la question **4.4.** précédente vérifie bien l'équation intégrale (2).

Fin de l'épreuve

Fin
Fin

1.1 Formule de Taylor avec reste intégrale

1.1.1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, en effectuant une intégration par partie sur R_{k-1}

$$R_{k-1} = \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$$

1.1.2. Par récurrence sur n. Si $n = 0$ la formule se déduit trivialement de

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

supposons la vraie pour $n-1$ et montrons la pour n, on a en appliquant H.R et la formule **1.1.1** :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

ce qui achève la récurrence

1.2 Application au calcul de la somme d'une série

On considère la fonction $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t > -1 \qquad \psi(t) = \ln(1+t).$$

1.2 .1. La fonction ψ est de classe C^∞ comme composée de deux fonctions de classe C^∞ et on a

$$\forall\, t > -1 \qquad \psi'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

supposons qu'on a , pour un certain $n \geq 1$,

$$\forall\, t > -1 \qquad \psi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

en dérivant on obtient

$$\forall\, t > -1 \qquad \psi^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}.$$

on conclut , d' après le principe de récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, t > -1 \qquad \psi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

1.2 .2. Utiliser le critère spécial des séries alternée.

1.2 .3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction ψ entre $a = 0$ et $b = 1$ on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(2) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} + \underbrace{(-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t}_{=R_n}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$|R_n| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2^n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi , en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k}=\ln(2)$$

$2^{\text{ème}}$ Partie : Application au développement en série entière d'une fonction complètement monotone

Soit f une fonction de classe C sur l'intervalle $]-a,a[$, avec $a>0$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in]-a,a[;\qquad f^{(n)}(x)\geq 0.$$

Pour $(n,x)\in\mathbb{N}\times]-a,a[$, on pose $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,du$

2.1. Soient $x\in]-a,a[$ et $n\in\mathbb{N}$. D' après la formule de Taylor reste intégrale appliquée à f entre 0 et x on obtient

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

Si $x=0$ la formule demandée est triviale, elle est réduite à $f(0)=f(0)$, Si non $(x\neq 0)$ on effectue le changement de variable $t=xu$ dans l' intégrale de $(*)$

2.2. Soit $x\in[0,a[$. par positivité des $f^{(n)}(x)$ et par son expression on a $R_n(x)\geq 0$ et de

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+R_n(x)\qquad \text{et}\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\geq 0$$

on déduit $\quad R_n(x)\leq f(x)$

2.3. La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$ est une série positive dont la suite des somme partielle est majorée puisque

$$\forall n\in\mathbb{N};\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\leq f(x)$$

donc elle est convergente .

2.4. Soient $n\in\mathbb{N},\quad x\in[0,a[$ et $y\in]x,a[$

- On a déjà $0\leq R_n(x)$.
- On a $f^{(n+1)}$ croissante puisque sa dérivée $f^{(n+2)}$ est positive donc

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,du\leq\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(yu)\,du=\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}R_n(y)$$

- En majorant $R_n(y)$ par $f(y)$ on a la dernière inégalité :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}R_n(y)\leq\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}f(y)$$

2.5. d' après **1.6.**, puisque $|\dfrac{x}{y}|<1$ on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ donc d'après

1.3. en faisant tendre $n\to+\infty$, on déduit que $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$

2.6. Soient $n\in\mathbb{N},\quad x\in]-a,0[$. Par croissance de $f^{(n+1)}$

$$|R_n(X)|=\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n\underbrace{f^{(n+1)}(xu)}_{\leq f^{(n+1)}(0)}\,du\leq\frac{|x|^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(0)\underbrace{\int_0^1(1-u)^n\,du}_{=\frac{1}{n+1}}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$$

Puisque $|x| \in]0,a[$ d' après la question précédente la série $\sum \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$ converge donc son terme général $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par suite $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et d'après **1.3.** en faisant tendre $n \to +\infty$, on conclut que la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ converge de somme $f(x)$

$3^{\text{ème}}$ Partie : Étude d'une équation différentielle linéaire

Soit l'équation différentielle linéaire :

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad (E)$$

Σ l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que φ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)

3.1. La fonction nulle est évidement dans Σ et si φ_1 et φ_2 sont dans Σ on vérifie aisément que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ la fonction $\varphi_1 + \alpha\varphi_2$ est dans Σ

3.2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

3.2.1. f_λ est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda^4 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

si et seulement si $\lambda^4 = 1$

3.2.2. Les solution de (E) de la forme f_λ sont alors

$$f_1(x) = e^x, \quad f_{-1}(x) = e^{-x} \quad f_i(x) = e^{ix}, \quad f_{-i}(x) = e^{-ix} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

3.3. Un minorant de la dimension de Σ

3.3.1. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_4$ des complexes deux à deux distincts. On considere $\alpha_1, ..., \alpha_4 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 f_{\lambda_1}(x) + \alpha_2 f_{\lambda_2}(x) + \alpha_3 f_{\lambda_3}(x) + \alpha_4 f_{\lambda_4}(x) = 0 \qquad (*)$$

En dérivant $(*)$ trois fois et en remplaçant, à chaque fois x par 0 on obtient le système suivant d'inconnues $(\alpha_1, ..., \alpha_4)$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4 & = & 0 \\ \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3 + \lambda_4^2\alpha_4 & = & 0 \\ \lambda_1^3\alpha_1 + \lambda_2^3\alpha_2 + \lambda_3^3\alpha_3 + \lambda_4^3\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S)$$

son déterminant est le déterminant de Vandermonde associé à la famille $(\lambda_1, ..., \lambda_4)$:

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

donc le système (S) admet une unique solution à savoir $(0,0,0,0)$ donc $(\alpha_1, ..., \alpha_4) = (0,0,0,0)$ ce qui montre que la famille $(f_{\lambda_1}, ..., f_{\lambda_4})$ est libre

3.3.2. La famille $(f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i})$ est libre dans Σ donc $\dim \Sigma \geq 4$

3.4. Étude d'une application linéaire

3.4.1. On vérifie facilement que pour tout φ_1, φ_2 dans Σ et $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\Delta(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = \Delta(\varphi_1) + \alpha\Delta(\varphi_2)$$

3.4.2. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à g sur $[t_0, x]$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(x-t_0)^k}{k!} \underbrace{g^{(k)}(t_0)}_{=0} + \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} \underbrace{g^{(4)}(s)}_{=g(s)} \, ds = \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} g(s) \, ds$$

3.4.3. **(i)** Par récurrence sur k. l' inégalité est vraie pour $k = 0$ puisque $|g(x)| \leq M_t$ pour tout $x \in I_t$. Suppposon que pour un certain entier k on a

$$\forall x \in I_t \qquad |g(x)| \leq M_t \alpha_t^k \frac{|x-t_0|^k}{k!}$$

d'après 2.4.2 pour tout $x \in I_t$

$$|g(x)| \leq \left| \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} |g(s)|\, ds \right| \leq M_t \alpha_t^k \left| \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6} \frac{|s-t_0|^k}{k!}\, ds \right| \leq M_t \alpha_t^{k+1} \left| \int_{t_0}^{x} \frac{(s-t_0)^k}{k!}\, ds \right| = M_t \alpha_t^{k+1} \frac{|x-t_0|^k}{k!}$$

(ii) Par croissance comparées

(iii) il suffit de tendre k vers $+\infty$ dand (i).

3.4.4. Tout élément de $\ker \Delta$ est nulle d'après ce qui précède donc Δ est injective, par conséquence $\dim \Sigma \leq \dim \mathbb{C}^4 = 4$, et comme $\dim \Sigma \geq 4$ on déduit que $\dim \Sigma = 4$ de plus $(f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i})$ est libre dans Σ à 4 éléments donc forme une base de Σ.

$4^{\text{ème}}$ Partie : Application à l'étude d'une équation intégrale

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (2)$$

Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une telle application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \int_0^x (x-t)^n f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (3)$$

4.1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_0(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

Ainsi g_0 est la primitive de f qui s'annule en 0 donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g_0' = f$.

4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

4.2.1. Il suffit de développer le terme $(x-t)^n$ par la formule de binômes et appliquer la linéarité de lintégrale

4.2.2. Pour tout $k \in 0n$ les fonctions $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^{n-k} f(t)\, \mathrm{d}t$ sont dérivables , g_n est donc une combinaison linéaire de fonctions dérivables , par conséquences elle est dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \tbinom{n}{k} \left[(kx^{k-1}) \int_0^x t^{n-k} f(t)\, \mathrm{d}t + x^k x^{n-k} f(x) \right] \\
&= n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \tbinom{n-1}{k-1} x^{k-1} \int_0^x t^{n-k} f(t)\, \mathrm{d}t + x^n f(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \tbinom{n}{k}}_{=0} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \tbinom{n-1}{k} x^k \int_0^x t^{n-1-k} f(t)\, \mathrm{d}t \\
&= n g_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

4.3. **Recherche dune équation différentielle vérifiée par f**

4.3.1. Vérification immédiate puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_3(x) = \int_0^x (x-t)^3 f(t)\, \mathrm{d}t \qquad et \qquad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\, \mathrm{d}t$$

4.3.2. En utilisant 4.2.2 avec une récurrence simple sur n , on montre que g_n est $n+1$ dérivable et que

$$g_n^{(n+1)} = n! f$$

Ainsi en prenant $n = 3$ on trouve que f est 4 fois dérivable et que

$$f^{(4)} = x^{(4)} + \frac{1}{6} g_3^{(4)} = f$$

4.3.3. f est alors élément de σ et d'après 3.4.4 on le résultat voulu .

4.4.

- On a

$$\begin{cases} f(0) = 0 + \dfrac{1}{6} g_3(0) = 0 \\ f(0) = 1 + \dfrac{1}{2} g_2(0) = 1 \\ f(0) = g_1(0) = 0 \\ f(0) = g_0(0) = 0 \end{cases}$$

- En prenant dans le système précédent $f(x) = ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix}$ on obtiens le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + ic - id = 1 \\ a + b - c - d = 0 \\ a - b - ic + id \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $a = \frac{1}{4}$, $\quad b = -\frac{1}{4}, c = \frac{1}{4i}$ et $d = -\frac{1}{4i}$ ce qui conduit à

$$f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(x) + \sin(x))$$

Fin