Devoir Maison N° 11

Polynômes

Les Must To Know

Polynômes de Legendre

Polynômes de Legendre

On pose $\Phi_n(x) = \left(x^2-1\right)^n$ et $P_n(x) = \alpha(n)\,\Phi_n^{(n)}(x) = \alpha(n)\,\frac{d^n}{dx^n}\Phi_n(x)$. Le nombre $\alpha(n) \neq 0$ sera précisé par la suite.

1. Déterminer, pour $0 \leq n \leq 4$, les polynômes $P_n(x)$. On remarquera que $\forall n\,:\, dg\,(P_n) = n$.
2. Montrer que, pour tout n, le polynôme $P_n(x)$ possède exactement n racines réelles, toutes situées dans $]-1;+1[$.
3. Utiliser $\Phi_n^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$ pour calculer de deux façons le coefficient dominant de $P_n(x)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.
4. Déterminer $\alpha(n)$ par la condition $P_n(1) = 1$. Tracer (sur un même graphe) les courbes représentatives de $P_n(x)$ pour $0 \leq n \leq 4$ et $-1 \leq x \leq +1$.
5. Utiliser $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\Phi_{n+1}^{(1)}(x)\right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\left(x^2-1\right)\Phi_n(x)\right)$ pour obtenir deux relations entre $\Phi_{n+1}^{(n+1)}$, $\Phi_n^{(n+1)}$, $\Phi_n^{(n)}$ et $\Phi_n^{(n-1)}$. En déduire une relation entre $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $P_n'(x)$.
6. Montrer que, pour tout n, $P_{n+1}'(x) = (n+1)\,P_n(x) + x\,P_n'(x)$.
7. En déduire une relation entre $P_n(x)$, $P_n'(x)$ et $P_n''(x)$.
8. On a donc la relation $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ n+1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$. Partir de $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et poser les calculs pour aboutir à $\begin{pmatrix} P_3 \\ P_3' \end{pmatrix}$.
9. Obtenir P_n et P_n' en fonction de P_{n+1} et de P_{n+1}'.
10. Montrer que les racines de P_n s'intercalent entre les racines de P_{n+1} (commencer par tester cela pour $n \leq 3$).

Polynômes de Laguerre

Polynômes de Laguerre

On pose $\Phi_n(x) = (-x)^n \exp(-x)$ et $P_n(x) = \frac{1}{n!}\exp(x)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\Phi_n(x)$.

1. Déterminer, pour $0 \leq n \leq 4$, les fonctions $P_n(x)$. Tracé (sur un même graphe).
2. Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme de degré n. Déterminer les coefficients $c_n(k)$ définis par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} c_n(k)\, X^k$.
3. Exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$, $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+2)}(x)$ en fonction de $P_n(x)$, $P_n'(x)$ et $P_n''(x)$.
4. Utiliser $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}(-x\,\Phi_n(x))$ une relation entre $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_n'(X)$.
5. Utiliser $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\left(\Phi_{n+1}^{(1)}(x)\right)$, ainsi que la relation précédente pour obtenir une relation entre $P_{n+1}'(X)$, $P_n(X)$ et $P_n'(X)$.
6. En déduire une relation entre $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et $P_n''(X)$. Transformer cette équation différentielle en une relation de récurrence entre les coefficients de P_n. Vérifier cette relation à l'aide de Q2.
7. Mettre les résultats de Q4 et Q5 sous la forme $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+1}' \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$ où M_n désigne une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}_1[x]$. Partir de $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et poser les calculs aboutissants à $\begin{pmatrix} P_3 \\ P_3' \end{pmatrix}$.
8. Montrer que les polynômes P_n n'ont pas de racines multiples (dans $\mathbb{C}[X]$).
9. Pour $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(Q_1, Q_2) = \int_0^{\infty} Q_1(x)\, Q_2(x) \exp(-x)\, dx$. Trouver les valeurs de $\varphi\left(X^k, X^j\right)$ pour $j, k \in \mathbb{N}$, ainsi que les valeurs de $\varphi(P_k, P_j)$ pour $j, k \leq 4$.
10. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $\varphi(P_n, Q) = \lambda(n) \int_0^{\infty} \Phi_n(x)\, Q^{(n)}(x)\, dx$ pour une certaine constante $\lambda(n)$ que l'on déterminera. En déduire $\varphi(P_k, P_j)$ pour $j, k \in \mathbb{N}$.
11. Utiliser le résultat précédent pour montrer que les racines d'un polynôme P_n donné sont toutes simples et situées dans $]0, +\infty[$.
12. Montrer que les racines de P_n s'intercalent entre les racines de P_{n+1}.

ds4 : Polynômes de Hermite

9.2 Polynômes de Hermite

On pose $\Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ et $P_n(x) = \frac{1}{n!}\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\Phi(x)$.

9.2.1 Relations de récurrence

1. Déterminer, pour $0 \leq n \leq 4$, les fonctions $P_n(x)$. Tracé rapide (sur un même graphe).
2. Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité éventuelle de ces polynômes.
3. Utiliser $\Phi^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\Phi^{(n)}(x)\right)$ pour obtenir $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P_n'(x)$.
4. Utiliser $\Phi^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}\left(\Phi^{(1)}(x)\right)$ et obtenir une relation analogue pour $P_{n+1}'(x)$.
5. En déduire une relation entre $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et $P_n''(X)$. Transformer cette équation différentielle en une relation de récurrence entre les coefficients de P_n.
6. Résoudre la récurrence de Q5 et obtenir une formule effective pour les coefficients de $P_n(x)$. On choisira d'écrire ce polynôme sous la forme $P_n(x) = \sum_{j=0}^{j=E(n/2)} c(n,j)\,x^{n-2j}$.
7. Mettre les résultats de 2.1.4 et 2.1.5 sous la forme $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+1}' \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$ où M_n désigne une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}_1[x]$. Partir de $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et poser les calculs aboutissants à $\begin{pmatrix} P_3 \\ P_3' \end{pmatrix}$.
8. Montrer que les racines des polynômes P_n sont toutes des racines simples.
9. On admettra que toutes les racines des P_n sont réelles. Quelle relation y a-t-il entre les racines de deux polynômes successifs ?

9.2.2 Somme des carrés des racines d'un polynôme

1. Soit $Q(x) = x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + R(x)$ un polynôme de degré $n \geq 2$ (avec $dg(R) \leq n-3$). On désigne ses racines par x_j $(1 \leq j \leq n)$. Exprimer $\sum_1^n x_j^2$ en fonction de b et de c.
2. Calculer la somme des carrés des racines des polynômes $P_n(x)$ pour $n \leq 4$.
3. Utiliser 2.1.6 pour généraliser le résultat de la question précédente. Que peut-on en déduire pour la plus grande racine de $P_n(x)$?
4. Soit $Q(x) = x^n + \beta\,x^{n-2} + \gamma\,x^{n-4} + R(x)$ un polynôme de degré $n \geq 4$ ayant la parité de son degré (avec $dg(R) \leq n-6$). On désigne ses racines par x_j $(1 \leq j \leq n)$. Exprimer $\sum_1^n x_j^4$ en fonction de β et de γ.
5. Appliquer le résultat précédent aux polynômes $P_n(x)$. Que peut-on en déduire pour la plus grande racine de $P_n(x)$? Comparer avec le majorant obtenu en 2.2.3.

ds5 : Groupes ; polynômes de Bernoulli

11.3 Polynômes de Bernoulli

Dans ce qui suit, on a $n,\ m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite B_n de polynômes par $B_0(x) = 1$ et par la récurrence

$$\begin{aligned} B_n'(x) &= n\,B_{n-1}(x) \\ B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1)\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = (n+1)\,x^n \end{aligned}$$

et l'on appelle nombre de Bernoulli d'ordre n le nombre $b_n = B_n(0)$.

1. Montrer que $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et que $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
2. Vérifier que $B_1(0) = -B_1(1)$ et montrer que, pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
3. Montrer par récurrence sur n que $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}$. En déduire que, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.
4. On définit $P_n(x) = B_n(x) - (-1)^n B_n(-x) + n\,x^{n-1}$. Montrer que $P_n'(x) = n\,P_{n-1}(x)$. Montrer que $P_n(x) = B_n(x+1) - (-1)^n B_n(-x)$.
   Pour n impair, montrer que $\int_0^1 P_n(-t)\,dt = 0$. En conclure que, pour tout n, $P_n(x) = 0$.
5. En déduire que, pour $m \geq 1$, $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1) = b_{2m+1} = 0$. Prouver que les fonctions $x \mapsto B_n\left(x + \frac{1}{2}\right)$ sont paires ou impaires avec n. En déduire que, pour tout m, $B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
6. Montrer que les polynômes $Q_n(x) = B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) + B_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} B_n(2x)$ sont pairs ou impairs avec n et vérifient $Q_{n+1}'(x) = (n+1)\,Q_n(x)$.
7. Montrer que $Q_0 = 0$ et que, pour tout m, $Q_{2m} = 0$ implique $Q_{2m+1} = 0$. Montrer que $Q_{2m} = 0$ implique en outre $Q_{2m+2} = 0$ (considérer Q_{2m+3}). En conclure que $B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{2m-1}} - 1\right) b_{2m}$.
8. On suppose que $B_{2m}(0) > 0$ et que B_{2m} n'a qu'une racine, simple, sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Montrer qu'alors $B_{2m+1}(x) \geq 0$ pour $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, puis que $B_{2m+2}(0) < 0$ et que B_{2m+2} n'a qu'une racine, simple, sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Montrer qu'alors $B_{2m+3}(x) \leq 0$ pour $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, puis que $B_{2m+4}(0) > 0$ et que B_{2m+4} n'a qu'une racine, simple, sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.
9. En déduire que, pour tout $m \geq 1$, b_{2m} est du signe de $(-1)^{m+1}$.
10. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ et que, pour $m \geq 1$, $\int_0^{1/2} B_{2m}(t)\,dt = 0$.
11. Utiliser Q7 pour montrer que, pour $m \geq 1$, $\left|\int_0^{1/2} B_{2m+1}(t)\,dt\right| \frac{|b_{2m+2}|}{m+1}$.
    Et que $\sup_{x\in[0,\,1]} |B_{2m+2}(x)| = |b_{2m+2}|$.

Le Corrigé

Polynômes de Legendre

Polynômes de Legendre

On pose $\Phi_n(x) = \left(x^2-1\right)^n$ *et* $P_n(x) = \alpha(n)\,\Phi_n^{(n)}(x) = \alpha(n)\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\Phi_n(x)$. *Le nombre* $\alpha(n) \neq 0$ *sera précisé par la suite.*

1. *Déterminer, pour* $0 \leq n \leq 4$, *les polynômes* $P_n(x)$. *On remarquera que* $\forall n\ :\ dg(P_n) = n$.
   (a) On trouve $P_0(x) = \alpha(0)$, $P_1(x) = \alpha(1)\,2x$, $P_2(x) = \alpha(2)\,\left(12x^2-4\right)$, $P_3(x) = \alpha(3)\,\left(120x^3-72x\right)$, $P_4(x) = \alpha(4)\,\left(1680x^4-1440x^2+144\right)$.
   (b) On remarque en effet que $\forall n\ :\ dg(P_n) = n$.
2. *Montrer que, pour tout* n, *le polynôme* $P_n(x)$ *possède exactement* n *racines réelles distinctes, toutes situées dans* $]-1;\,+1[$.
   (a) On va montrer que, pour $0 \leq k \leq n$, le polynôme $\Phi_n^{(k)}$ admet $n-k$ fois -1 pour racine, $n-k$ fois $+1$ pour racine et possède en outre k racines $x_{k;1}\ \ldots\ x_{k;k}$ réelles distinctes dans $]-1,\,+1[$, ce qui fait $2n-k$ racines en tout et $k+2$ racines distinctes lorsque $k<n$.
   (b) La propriété est clairement vraie pour $k=0$. Nous la supposons vraie pour un $k<n$. Le théorème de Rolle montre qu'entre deux racines distinctes de $\Phi_n^{(k)}$, il existe au moins une racine de $\left(\Phi_n^{(k)}\right)'$, ce qui nous fait au moins $k+1$ racines $x_{k+1;1}\ \ldots\ x_{k+1;k+1}$ réelles distinctes dans $]-1,\,+1[$. En outre, par Leibniz, nous voyons que le facteur $\left(x^2-1\right)$ figure au moins encore $n-k-1$ fois dans $\Phi_n^{(k+1)}$, ce qui nous fait au moins $2(n-k-1)+(k+2-1) = 2n-(k+1)$ racines.
   (c) Mais le polynôme $\Phi_n^{(k+1)}$ ne peut avoir plus de $2n-k-1$ racines puisque tel est son degré.
3. *Utiliser* $\Phi_n^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$ *pour calculer de deux façons le coefficient dominant de* $P_n(x)$. *En déduire la valeur de* $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
   (a) On a $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,x^k}x^n = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ lorsque $0 \leq k \leq n$: la formule est évidente pour $k=0$, et le résultat se propage par récurrence.
   (b) On en déduit $\Phi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$. Par identification des termes de degré n, il vient $coeff\left(\Phi_n^{(n)},\,x,\,n\right) = n!\,\sum_0^n \binom{n}{k}^2$.
   (c) D'autre part, le calcul direct donne $coeff\left(\Phi_n^{(n)},\,x,\,n\right) = \frac{2n!}{n!}$. On en déduit $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
4. *Déterminer* $\alpha(n)$ *par la condition* $P_n(1) = 1$. *Tracer (sur un même graphe) les courbes représentatives de* $P_n(x)$ *pour* $0 \leq n \leq 4$ *et* $-1 \leq x \leq +1$.
   (a) Si l'on porte $x=1$ dans 3.b, tous les termes s'annulent sauf le dernier. Par conséquent $\Phi_n^{(n)}(x) = 2^n\,n!$

(b) On en déduit $\alpha(n) = \frac{1}{2^n\, n!}$, et $cd(P_n) = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

(c) D'où $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

5. *Utiliser* $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\Phi_{n+1}^{(1)}(x)\right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\left(x^2-1\right)\Phi_n(x)\right)$ *pour obtenir deux relations entre* $\Phi_{n+1}^{(n+1)}$, $\Phi_n^{(n+1)}$, $\Phi_n^{(n)}$ *et* $\Phi_n^{(n-1)}$. *En déduire une relation entre* $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ *et* $P_n'(x)$.

   (a) $\Phi_{n+1}^{(n+1)} = \frac{d^n}{dx^n}\left(2x\,(n+1)\,\Phi_n\right)$ donne $\Phi_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)\,x\,\Phi_n^{(n)} + 2n(n+1)\,\Phi_n^{(n-1)}$.

   (b) $\Phi_{n+1}^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\left(x^2-1\right)\Phi_n\right)$ donne
   $\Phi_{n+1}^{(n+1)} = \left(x^2-1\right)\Phi_n^{(n+1)} + (n+1)\,2x\,\Phi_n^{(n)} + n(n+1)\,\Phi_n^{(n-1)}$.

   (c) Une habile combinaison linéaire donne $\Phi_{n+1}^{(n+1)} = 2\left(x^2-1\right)\Phi_n^{(n+1)} + 2x(n+1)\,\Phi_n^{(n)}$. En multipliant par $\alpha(n+1) = \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!}$ il vient $P_{n+1} = x\,P_n + \frac{x^2-1}{n+1}P_n'$.

6. *Montrer que, pour tout* n, $P_{n+1}'(x) = (n+1)\,P_n(x) + x\,P_n'(x)$.
   On dérive 5.a et l'on trouve la relation demandée.

7. *En déduire une relation entre* $P_n(x)$, $P_n'(x)$ *et* $P_n''(x)$.

   (a) En dérivant 5.c, on trouve $P_{n+1}' = (n+1)\,P_n + x\,P_n' = P_n + x\,P_n' + \frac{2x}{n+1}P_n' + \frac{x^2-1}{n+1}P_n''$.

   (b) On en déduit la relation demandée : $\left(x^2-1\right)P_n''(x) + 2x\,P_n'(x) - n(n+1)\,P_n(x) = 0$.

   (c) Ce qui se réécrit en $P_n'' = x^2P_n'' + 2x\,P_n' - n(n+1)\,P_n$. D'où
   $(k+2)(k+1)\,c_{k+2} = (k(k-1) + 2k - n(n+1))\,c_k$ et donc $c_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(k+n+1)}c_{k+2}$.

   (d) Exemple : pour $n = 4$, on a $c_4 = \frac{1}{16}\binom{8}{4} = \frac{35}{8}$. D'où $c_2 = -\frac{3\times 4}{2\times 7} \times \frac{35}{8} = -\frac{30}{8}$ et $c_0 = +\frac{1\times 2}{4\times 5} \times \frac{15}{4} = \frac{3}{8}$, soit $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$.

8. *Partir de* $\left(\,P_0 \quad P_0'\,\right) = \left(\,1 \quad 0\,\right)$ *et poser les calculs pour aboutir à* $\left(\,P_3 \quad P_3'\,\right)$ *après avoir mis les résultats précédents sous la forme*

$$\left(\; P_{n+1} \quad P_{n+1}' \;\right) = \begin{pmatrix} \star & n+1 \\ \star & x \end{pmatrix} \left(\; P_n \quad P_n' \;\right)$$

   En effet, cela s'écrit mieux en ligne...

		x	1	x	2	x	3	x	4
		x^2-1	x	$\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$	x	$\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)$	x	$\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)$	x
1	0	x	1	$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$	$3x$	$\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$	$\frac{15}{2}x^2-\frac{3}{2}$	$\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}$	$\dots$

9. *Obtenir* P_n *et* P_n' *en fonction de* P_{n+1} *et de* P_{n+1}'.
   Un calcul immédiat donne $\left(\; P_n \quad P_n' \;\right) = \begin{pmatrix} x & -n-1 \\ -\frac{x^2-1}{n+1} & x \end{pmatrix} \left(\; P_{n+1} \quad P_{n+1}' \;\right)$

10. *Montrer que les racines de* P_n *s'intercalent entre les racines de* P_{n+1} *(commencer par tester cela pour* $n \leq 3$*).*

    (a) Test numérique.

    (b) Soient ξ_j les racines de P_{n+1}, rangées en ordre croissant. On a donc $-1 < \xi_1 < dots < \xi_{n+1} < 1$. La relation précédente donne (pour $0 \leq j \leq n$)
    $P_n(\xi_j)\,P_n(\xi_{j+1}) = P_{n+1}'(\xi_j)\,P_{n+1}'(\xi_{j+1}) \times K_j$ avec $K_j > 0$.

    (c) Comme les racines de P_{n+1} sont des racines réelles simples, les racines de P_{n+1}' sont à leur tour réelles et simples et s'intercalent entre les racines de P_{n+1}. On a donc $P_{n+1}'(\xi_j)\,P_{n+1}'(\xi_{j+1}) < 0$.

    (d) Il y a donc au moins une racine de P_n dans chaque intervalle $I_j \doteq \,]\,\xi_j, \xi_{j+1}\,[$. Comme il y en a n au total, cela en fait donc exactement une dans chaque intervalle I_j.

Polynômes de Laguerre

Polynômes de Laguerre

On pose $\Phi_n(x) = (-x)^n \exp(-x)$ *et* $P_n(x) = \frac{1}{n!} \exp(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} \Phi_n(x)$.

1. *Déterminer, pour* $0 \leq n \leq 4$, *les fonctions* $P_n(x)$. *Tracé (sur un même graphe).*
   Il vient $P_0 = 1$, $P_1 = x - 1$, $P_2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, $P_3 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$, et enfin $P_4 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

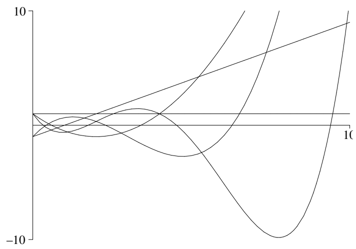

FIGURE 8.1 – Les polynômes P_0 à P_4.

2. *Montrer que , pour tout* $n \in \mathbb{N}$, P_n *est un polynôme de degré* n. *Déterminer les coefficients* $c_n(k)$ *définis par* $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} c_n(k) X^k$.
   (a) Comme $\Phi_n(x)$ est un produit, on peut appliquer la formule de Leibniz : $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n}\Phi_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n}(x^n \exp(-x))$, d'où $\Phi_n^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{n!}{k!} x^k \times (-1)^k \exp(-x) \right)$
   (b) On a donc $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{(k!)^2 (n-k)!} x^k$, ce qui montre que $P_n(x)$ est un polynôme de degré n. Ses coefficients sont donnés par $c(n,k) = \frac{(-1)^{(n-k)} n!}{(k!)^2 (n-k)!}$
3. *Exprimer* $\Phi_n^{(n)}(x)$, $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ *et* $\Phi_n^{(n+2)}(x)$ *en fonction de* $P_n(x)$, $P_n'(x)$ *et* $P_n''(x)$.
   (a) De par la définition de $P_n(x)$, on a $\Phi_n^{(n)}(x) = P_n(x)\, n! \exp(-x)$.
   (b) Par dérivation, il vient $\Phi_n^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) - P_n(x))\, n! \exp(-x)$ et
   $$\Phi_n^{(n+2)}(x) = \left(P_n''(x) - 2P_n'(x) + P_n(x)\right) n! \exp(-x) .$$
4. *Utiliser* $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\, x^{n+1}}(-x\, \Phi_n(x))$ *une relation entre* $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ *et* $P_n'(X)$.
   (a) On constate aisément que $\Phi_{n+1}(x) = -x\, \Phi_n(x)$.
   (b) Applicant la formule de Leibniz, on obtient $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = -x\, \Phi_n^{(n+1)}(x) - (n+1)\, \Phi_n^{(n)}(x)$. En revenant aux P_n, il vient :
   $$P_{n+1}(x) = \left(\frac{x}{n+1} - 1\right) P_n(x) - \frac{x}{n+1} P_n'(x) \tag{8.1}$$

5. *Utiliser $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\left(\Phi_{n+1}^{(1)}(x)\right)$, ainsi que la relation précédente pour obtenir une relation entre $P'_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P'_n(X)$.*

   (a) On a $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\left(\Phi_{n+1}^{(1)}(x)\right)$, soit $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = -(n+1)\frac{d^n}{d\,x^n}\left((-x)^n \exp(-x)\right) - \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left((-x)^{n+1}\exp(-x)\right)$.

   (b) En dérivant une fois de plus, on obtient $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = -(n+1)\,\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$. Avec Q3, il vient

   $$\left(P'_{n+1}(x) - P_{n+1}(x)\right)(n+1)! = -(n+1)\left(P'_n(x) - P_n(x)\right) n! - P_{n+1}(x)\,(n+1)!\,.$$

   D'où :

   $$P'_{n+1}(x) = P_n(x) - P'_n(x) \tag{8.2}$$

6. *En déduire une relation entre $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et $P''_n(X)$. Transformer cette équation différentielle en une relation de récurrence entre les coefficients de P_n. Vérifier cette relation à l'aide de Q2.*

   (a) En combinant dérivant (9.1) et en comparant avec (9.2) on obtient l'équation différentielle $x\,P''_n(x) + (1-x)\,P'_n(x) + n\,P_n(x) = 0$.

   (b) Cette équation se réécrit en $x\,P''_n(x) + P'_n(x) = x\,P'_n(x) - n\,P_n(x)$. L'action de membre de gauche sur x^k fait baisser le degré, tandis que celle du membre de droite le conserve. On aboutit à la relation $(k+1)^2\,c(n,\,k+1) = (k-n)\;c(n,\,k)$.

   (c) On constate aisément que cette relation est compatible avec la formule de Q2.

7. *Mettre les résultats de Q4 et Q5 sous la forme $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P'_{n+1}\end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} P_n \\ P'_n\end{pmatrix}$ où M_n désigne une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}_1[x]$. Partir de $\begin{pmatrix} P_0 \\ P'_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$ et poser les calculs aboutissants à $\begin{pmatrix} P_3 \\ P'_3\end{pmatrix}$.*

   Ces résultats s'écrivent $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P'_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{n+1} - 1 & -\frac{x}{n+1} \\ +1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n \\ P'_n\end{pmatrix}$ ou encore, en les écrivant en ligne, $\begin{pmatrix} P_{n+1} & P'_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P'_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x}{n+1} - 1 & +1 \\ -\frac{x}{n+1} & -1\end{pmatrix}$. Il vient :

		$x-1$	$+1$	$\frac{1}{2}x - 1$	$+1$	$\frac{1}{3}x - 1$	$+1$	$\ldots$
		$-x$	-1	$-\frac{1}{2}x$	-1	$-\frac{1}{3}x$	-1	$\ldots$
1	0	$x-1$	$+1$	$\frac{x^2}{2} - 2x + 1$	$x-2$	$\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x - 1$	$\frac{x^2}{2} - 3x + 3$	$\ldots$
0	1	-1	-1	$\frac{-x^2}{2} + \frac{3x}{2}$	$-x+1$	$\frac{-x^3}{6} + \frac{4}{3}x^2 - \frac{11}{6}x$	$\frac{-x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 1$	$\ldots$

8. *Montrer que les polynômes P_n n'ont pas de racines multiples (dans $\mathbb{C}[X]$).*

   On voit que $\det(M_n) = 1$. Le déterminant du produit $B_n = M_n \ldots M_2\,M_1$ vaut donc 1 à son tour, et les polynômes P_n et P'_n vérifient une relation de type $A\,P_n + B\,P'_n = 1$: ils sont premiers entre eux.

9. *Pour $Q_1,\,Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(Q_1,\,Q_2) = \int_0^\infty Q_1(x)\,Q_2(x)\exp(-x)\;dx$. Trouver les valeurs de $\varphi\left(X^k,\,X^j\right)$ pour $j,\,k \in \mathbb{N}$, ainsi que les valeurs de $\varphi(P_k,\,P_j)$ pour $j,\,k \leq 4$.*

   (a) Une ippm conduit à $\varphi\left(x^k,\,x^j\right) = \int_0^\infty x^{j+k}\exp(-x)\;dx = (j+k)!$

   (b) Quelques calculs supplémentaires donnent $\varphi(P_k,\,P_j) = 0$ pour $j \neq k$ et $\varphi(P_j, P_j) = 1$.

10. *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $\varphi(P_n,\,Q) = \lambda(n)\int_0^\infty \Phi_n(x)\,Q^{(n)}(x)\;dx$ pour une certaine constante $\lambda(n)$ que l'on déterminera. En déduire $\varphi(P_k,\,P_j)$ pour $j,\,k \in \mathbb{N}$.*

(a) Une intégration par parties de $\int_0^\infty P_n(x)\,Q(x)\exp(-x)\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \Phi_n^{(n)}(x)\,Q(x)\,dx$ donne $-\frac{1}{n!}\int_0^\infty \Phi_n^{(n-1)}(x)\,Q^{(1)}(x)\,dx$. En effet, le terme tout intégré s'écrit $\Phi_n^{(n-1)}(x)$ fois un polynôme, et donc est nul à chacune des deux bornes.

(b) En itérant le processus, on obtient $\varphi(P_n, Q) = (-1)^n \frac{1}{n!}\int_0^\infty \Phi_n(x)\,Q^{(n)}(x)\,dx$, c'est à dire $\lambda(n) = (-1)^n \frac{1}{n!}$.

(c) Lorsque $dg(Q) < n$, on trouve donc $\varphi(P_n, Q) = 0$, établissant $\varphi(P_k, P_j) = 0$ pour $j \neq k$.

(d) Pour le cas $j = n$, on obtient $P_n^{(n)}(x) = n!\,cd(P_n) = 1$, d'où le résultat remarquable $\varphi(P_n, P_n) = (-1)^n \frac{1}{n!}\int_0^\infty (-x)^n \exp(-x)\,dx = 1$.

11. *Utiliser le résultat précédent pour montrer que les racines d'un polynôme P_n donné sont toutes simples et situées dans $]0, +\infty[$.*

(a) On considère le polynôme Q dont les racines, toutes de multiplicité 1, sont les racines de P_n qui sont d'ordre impair et appartiennent à l'intervalle $]0, +\infty[$.

(b) Le polynôme $Q(x)\,P_n(x)$ est donc positif sur $\mathbb{R}^+$. Si l'on avait $\int_0^{+\infty} Q(x)\,P_n(x)\,dx = 0$, ce polynôme serait le polynôme nul.

(c) Il faut donc que $dg(Q) = n$, ce qui prouve que les racines de P_n sont toutes simples et situées dans $]0, +\infty[$.

12. *Montrer que les racines de P_n s'intercalent entre les racines de P_{n+1}.*

(a) Soient $(x_j)_{1\leq j\leq n+1}$ les racines de P_{n+1} rangées par ordre croissant.

(b) La relation $P_n(x) = -P_{n+1}(x) + \frac{x}{n+1}P'_{n+1}(x)$, obtenue en inversant M_n, montre que $P_n(x_j)\ P_n(x_{j+1}) = \frac{x_j}{n+1}\frac{x_{j+1}}{n+1}P'_{n+1}(x_j)\,P'_{n+1}(x_{j+1})$. On a clairement $x_j x_{j+1} > 0$.

(c) Comme x_j et x_{j+1} sont des racines simples consécutives de P_{n+1}, il y a exactement une racine de P'_{n+1} vérifiant $x_j < x < x_{j+1}$ et l'on a $P'_{n+1}(x_j)\,P'_{n+1}(x_{j+1}) < 0$.

(d) On en déduit que $P_n(x_j)\,P_n(x_{j+1}) < 0$, montrant qu'il y a au moins une racine de P_n entre deux racines consécutives de P_{n+1}. Un argument de dénombrement montre qu'il ne peut pas y en avoir plusieurs.

ds4 : Polynômes de Hermite

9.2 Polynômes de Hermite

On pose $\Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\Phi(x)$.

9.2.1 Relations de récurrence

1. *Déterminer, pour* $0 \le n \le 4$, *les fonctions* $P_n(x)$. *Tracé rapide sur un même graphe.* 2

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},\ P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x,\ P_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$$

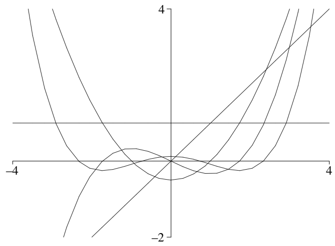

FIGURE 9.1 – Les polynômes P_0 à P_4.

2. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, P_n *est un polynôme. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité éventuelle de ces polynômes.*

   (a) Le plus simple est d'utiliser déjà la récurrence suggérée par la question 2.1.3. On a $\Phi^{(n)}(x) \doteq \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\Phi(x) = (-1)^n\, n!\, P_n(x)\ \Phi(x)$.

(b) De là : $\Phi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\,P_{n+1}(x)\;\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left((-1)^n\,n!\,P_n(x)\;\Phi(x)\right)$. Comme $\forall x\;:\;\;\Phi(x) \neq 0$, on arrive à :

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - P_n'(x) \tag{9.1}$$

(c) Montrons que $P_n \in \mathbb{R}(X)$, avec $dg(P_n) = n$, $cd(P_n) = \frac{1}{n!}$ et P_n de la parité de n. Ceci est clairement vrai de P_0. La formule (9.1) additionne deux termes de degrés différents, et il est clair que $x\,P_n$ et P_n' sont de la parité contraire à celle de P_n.

3. *Utiliser la relation $\Phi^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\Phi^{(n)}(x)\right)$ pour obtenir une expression de $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P_n'(x)$.*
Cf supra, formule (9.1).

4. *Utiliser la relation $\Phi^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}\left(\Phi^{(1)}(x)\right)$ pour obtenir une expression analogue pour $P_{n+1}'(x)$.*

(a) On obtient $\Phi^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}\left(-x\,\Phi(x)\right) = -x \times \Phi^{(n+1)}(x) - (n+1) \times 1 \times \Phi^{(n)}(x)$. En divisant par $(-1)^n\,(n+1)!\,\Phi(x)$, il vient $(n+2)\,P_{n+2}(x) = x\,P_{n+1}(x) - P_n(x)$. En comparant avec la relation (9.1), écrite pour l'indice $n+1$, on obtient la relation :

$$P_{n+1}'(x) = P_n(x) \tag{9.2}$$

(b) Cette relation se vérifie aisément sur les exemples P_0 à P_4.

5. *En déduire une relation entre $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et $P_n''(X)$. Transformer cette équation différentielle en une relation de récurrence entre les coefficients de P_n.*

(a) En dérivant la relation (9.1) et en soustrayant la relation (9.2), on obtient :

$$P_n''(x) - x\,P_n'(x) + n\,P_n(x) = 0 \tag{9.3}$$

(b) Ce qui se réécrit $P'' = x\,P' - nP$, conduisant à la “ descente” $(k+2)(k+1)\,a_{k+2} = (k-n)\,a_k$ (pour un polynôme écrit sous la forme $P(x) = \sum a_k x^k$. On vérifie que les coefficients de la mauvaise parité se déduisent de $a_{n+1} = 0$ et sont nuls à leur tour, tandis que a_n reste indéterminé par ces relations.

6. *Résoudre la récurrence de 2.1.5 et montrer que les polynômes $P_n(x)$ peuvent s'écrire sous la forme $P_n(x) = \sum_{j=0}^{j=E(n/2)} c(n,\,j)\,x^{n-2j}$ avec $c(n,\,j) = \frac{(-1)^j}{(n-2j)!\,j!\,2^j}$.*

(a) La formule précédente s'utilise sous la forme $a_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{n-k}a_{k+2}$, en descendant vers 0 à partir de $k = n-2$. Ceci suggère une renumérotation des coefficients, en partant du terme dominant.

(b) Pour $j = 0$, la formule proposée redonne bien le coefficient dominant $a_n = \frac{1}{n!}$.

(c) On procède alors par descente : en supposant que $c(n,\,j-1) = a_{n-2j+2}$, on obtient $a_{n-2j} = -\frac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{2j}\frac{(-1)^{j-1}}{(n-2j+2)!\,(j-1)!\,2^{j-1}}$, et donc $a_{n-2j} = c(n,\,j)$.

7. *Mettre les résultats de 2.1.3 et 2.1.4 sous la forme $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+1}' \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$ où M_n désigne une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}_1[x]$. Partir de $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et poser les calculs aboutissants à $\begin{pmatrix} P_3 \\ P_3' \end{pmatrix}$.*

Ces résultats s'écrivent $\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_{n+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{n+1} & -\frac{1}{n+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$, ou encore $\begin{pmatrix} P_{n+1} & P_{n+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_{n+1}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x}{n+1} & 1 \\ -\frac{1}{n+1} & 0 \end{pmatrix}$. Il vient :

	$\begin{matrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2}x & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{3}x & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{4}x & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & x \\ -\frac{x}{2} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \\ -\frac{x^2}{6}+\frac{1}{3} & -\frac{x}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8} & \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{24}x^3+\frac{5}{24}x & -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3} \end{matrix}$	

8. *Montrer que les racines des polynômes P_n sont toutes des racines simples.*

   (a) Les matrices M_n ont pour déterminant $\frac{1}{n+1}$, et le déterminant de leur produit est encore un scalaire. Le calcul direct donne une relation de Bezout, prouvant que $pgcd\,(P,\,P')=1$ et donc qu'il n'y a pas de racines multiples.

   (b) Pour $n=4$, on obtient ainsi $\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\right)P_4+\left(\frac{1}{24}x^3-\frac{5}{24}x\right)P_4'=\frac{1}{24}$.

   (c) Autre méthode : chaque matrice M_n est inversible. Donc leur produit B_n est aussi inversible, et on obtient $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix}=(B_n)^{-1}\begin{pmatrix} P_n \\ P_n' \end{pmatrix}$. Une racine commune à P_n et P_n' serait aussi racine de $P_0=1$. 1

9. *On admettra que toutes les racines des P_n sont réelles. Quelle relation y a-t-il entre les racines de deux polynômes successifs ?*

   Comme P_{n+1} possède $n+1$ racines réelles simples, les racines de $P_n=P_{n+1}'$ viennent s'intercaller entre les racines de P_{n+1}. 1

9.2.2 Somme des carrés des racines d'un polynôme

1. *Soit $Q\,(x)=x^n+b\,x^{n-1}+c\,x^{n-2}+R\,(x)$ un polynôme de degré $n\geq 2$ (avec $dg\,(R)\leq n-3$), et x_j $(1\leq j\leq n)$ ses racines. Exprimer la somme $\sum_1^n x_j^2$ en fonction de b et de c.*

   (a) Méthode élémentaire : $\sum_1^n x_j^2=\left(\sum_1^n x_j\right)^2-2\sum_{j<k}x_jx_k=(-b)^2-2c$.

   (b) Méthode de van Graeffe : on définit un polynôme Q_2 par $Q_2\left(x^2\right)=Q\,(x)\times(-1)^n\,Q\,(-x)$. Il vient $Q_2\left(x^2\right)=\left(x^n+b\,x^{n-1}+c\,x^{n-2}+R\,(x)\right)\left(x^n-b\,x^{n-1}+c\,x^{n-2}\pm R\,(-x)\right)$. On voit que les x_j^2 sont les racines de ce nouveau polynôme. En effectuant $Q_2\left(x^2\right)=x^{2n}-\left(b^2-2c\right)x^{2n-2}+\ldots$, le résultat suit. 1

2. *Calculer la somme des carrés des racines des polynômes $P_n\,(x)$ pour $n\leq 4$.*

   Pour $P_1=x$, $S_2=0$. Pour $P_2=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$, les racines sont ± 1 et $S_2=2$. Pour $P_3=\frac{1}{6}x^3-\frac{x}{2}$, les racines sont $\pm\sqrt{3}$ et 0 : $S_2=6$. Enfin, pour $P_4=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}$, on trouve $S_2=12$. 1

3. *Utiliser 2.1.6 pour généraliser le résultat de la question précédente. Que peut-on en déduire pour la plus grande racine de $P_n\,(x)$?*

   (a) D'après les résultats précédents, on a $b=0$ et $c=c\,(n,\,1)\,/c\,(n,\,0)=-\frac{n(n-1)}{2}$. D'où $S_2=n\,(n-1)$.

   (b) Si z_n désigne la plus grande racine de P_n, on a donc $2z^2\leq n\,(n-1)$ et $z\leq\frac{1}{\sqrt{2}}n$. 2

4. *Soit $Q\,(x)=x^n+\beta\,x^{n-2}+\gamma\,x^{n-4}+R\,(x)$ un polynôme de degré $n\geq 4$ ayant la parité de son degré (avec $dg\,(R)\leq n-6$). On désigne ses racines par x_j $(1\leq j\leq n)$. Exprimer $\sum_1^n x_j^4$ en fonction de β et de γ.*

   (a) Le polynôme Q_2 de la question 2.2.1 devient $Q_2\left(x^2\right)=\left(x^n+\beta\,x^{n-2}+\gamma\,x^{n-4}+R\,(x)\right)\times\left(x^n+\beta\,x^{n-2}+\gamma\,x^{n-4}\pm R\,(-x)\right)$. D'où $Q_2\,(x)=x^n+(2\beta)\,x^{n-1}+\left(\beta^2+2\gamma\right)x^{n-2}+\ldots$.

   (b) On applique alors la formule 2.2.1 au polynôme Q_2 et l'on trouve $\sum x_j^4=(2\beta)^2-2\left(\beta^2+2\gamma\right)=2\beta^2-4\gamma$.

(c) Autre méthode : pour n pair, on prend $\widetilde{Q}(x) = P_n(\sqrt{x})$, et pour n impair, on prend $\widetilde{Q}(x) = P_n(\sqrt{x})/\sqrt{x}$. Vu la parité des P_n, la fonction $\widetilde{Q}$ est polynomiale. Ce polynôme $\widetilde{Q}$ est de degré $m = E(n/2)$. Ses racines y_k sont sont les carrés (comptés une seule fois) des racines non nulles de P_n. Il vient alors $S_2 = \sum x_j^2 = 2\sum y_k = -2\beta$ et $S_4 = \sum x_j^4 = 2\sum y_k^2 = 2\left(\beta^2 - 2\gamma\right)$. 2

5. *Appliquer le résultat précédent aux polynômes $P_n(x)$. Que peut-on en déduire pour la plus grande racine de $P_n(x)$? Comparer avec le majorant obtenu en 2.2.3.*

(a) Appliquée aux polynômes $P_n(x)$, la formule donne $S_4 = 2\beta^2 - 4\gamma = \frac{1}{2}\frac{(n!)^2}{((n-2)!)^2} - \frac{1}{2}\frac{n!}{(n-4)!}$ d'où $S4 = n(n-1)(2n-3)$.

(b) Testons pour $n = 4$. Les racines sont $\pm\sqrt{3+\sqrt{6}}$, $\pm\sqrt{3-\sqrt{6}}$ et $S_4 = 2\left(3+\sqrt{6}\right)^2 + 2\left(3-\sqrt{6}\right)^2 = 60 = 4 \times 3 \times 5$.

(c) On en déduit que la plus grande racine (soit z) de P_n vérifie $2z^4 \leq n(n-1)(2n-3)$ et donc que $z \leq n^{3/4}$.

(d) Ce résultat est plus précis que celui obtenu avec les carrés, parce que le poids relatif de z dans $\sum x^4$ est plus important que le poids relatif de z dans $\sum x^2$ (principe de la méthode de van Graeffe).

11.3 Polynômes de Bernoulli

Dans ce qui suit, on a $n,\ m \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *On définit une suite* B_n *de polynômes par* $B_0(x) = 1$ *et par la récurrence*

$$\begin{aligned} B_n'(x) &= n\,B_{n-1}(x) \\ B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) &= (n+1)\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = (n+1)\,x^n \end{aligned}$$

et l'on appelle nombre de Bernoulli d'ordre n *le nombre* $b_n = B_n(0)$.

1. *Montrer que* $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ *et que* $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
2. *Vérifier que* $B_1(0) = -B_1(1)$ *et montrer que, pour* $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
3. *Montrer par récurrence sur* n *que* $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}$. *En déduire que, pour* $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\, b_k = 0$.
4. *On définit* $P_n(x) = B_n(x) - (-1)^n B_n(-x) + n\,x^{n-1}$. *Montrer que* $P_n'(x) = n\,P_{n-1}(x)$. *Montrer que* $P_n(x) = B_n(x+1) - (-1)^n B_n(-x)$.
   Pour n *impair, montrer que* $\int_0^1 P_n(-t)\,dt = 0$. *En conclure que, pour tout* n, $P_n(x) = 0$.
5. *En déduire que, pour* $m \geq 1$, $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1) = b_{2m+1} = 0$. *Prouver que les fonctions* $x \mapsto B_n\left(x + \frac{1}{2}\right)$ *sont paires ou impaires avec* n. *En déduire que, pour tout* m, $B_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
6. *Montrer que les polynômes* $Q_n(x) = B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) + B_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} B_n(2x)$ *sont pairs ou impairs avec* n *et vérifient* $Q_{n+1}'(x) = (n+1)\,Q_n(x)$.
7. *Montrer que* $Q_0 = 0$ *et que, pour tout* m, $Q_{2m} = 0$ *implique* $Q_{2m+1} = 0$. *Montrer que* $Q_{2m} = 0$ *implique en outre* $Q_{2m+2} = 0$ *(considérer* Q_{2m+3}*). En conclure que* $B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{2m-1}} - 1\right) b_{2m}$.
8. *On suppose que* $B_{2m}(0) > 0$ *et que* B_{2m} *n'a qu'une racine, simple, sur* $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. *Montrer qu'alors* $B_{2m+1}(x) \geq 0$ *pour* $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, *puis que* $B_{2m+2}(0) < 0$ *et que* B_{2m+2} *n'a qu'une racine, simple, sur* $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. *Montrer qu'alors* $B_{2m+3}(x) \leq 0$ *pour* $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, *puis que* $B_{2m+4}(0) > 0$ *et que* B_{2m+4} *n'a qu'une racine, simple, sur* $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.
9. *En déduire que, pour tout* $m \geq 1$, b_{2m} *est du signe de* $(-1)^{m+1}$.
10. *Montrer que, pour* $n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ *et que, pour* $m \geq 1$, $\int_0^{1/2} B_{2m}(t)\,dt = 0$.
11. *Utiliser Q7 pour montrer que, pour* $m \geq 1$, $\left|\int_0^{1/2} B_{2m+1}(t)\,dt\right| \frac{|b_{2m+2}|}{m+1}$.
    Et que $\sup_{x \in [0,\,1]} |B_{2m+2}(x)| = |b_{2m+2}|$.