Devoir Maison N° 12

Matrices 1

Problème 1

Soit p un réel fixé de l'intervalle $]0;1[$: $0<p<1$.
On définit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 1

1. Calculer A^2 . Que vaut A^0 ?
2. Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$A^n=\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

   Pour cela, on utilisera la relation $A^{n+1}=A^nA$ et on exhibera les expressions a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (obtenues en cours de la preuve).
3. La suite $(c_n)_n$ ainsi construite est une suite "classique" : de quel type est-elle ?
   En déduire l'expression de c_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
4. Étude de la suite $(a_n)_n$.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n=0$$

   (b) Exprimer a_n en fonction de n.
5. On pose la matrice colonne $U=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU=U$.

$$\mathcal{C}=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})|MU=U\}$$

   (a) Soit la proposition $\mathcal{P}$: "$M\in\mathcal{C},N\in\mathcal{C}\Rightarrow M+N\in\mathcal{C}$", cette proposition est-elle vraie ?
   (b) Montrer :

$$M\in\mathcal{C},N\in\mathcal{C}\Rightarrow MN\in\mathcal{C}$$

   (c) On pose $T={}^tA$, la transposée de la matrice A.
   Montrer que $T\in\mathcal{C}$ puis que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T^n\in\mathcal{C}$.
   (d) Quelle égalité a-t-on entre T^n et A^n ?
   (e) En déduire, connaissant une expression de a_n, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$b_n=1-np^{n-1}+(n-1)p^n$$

Partie 2

On définit les matrices :

$$B=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix}\ \textbf{et}\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer A^n d'une autre façon. On définit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $\Delta=P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
4. Calculer C^2.
5. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction des puissances des matrices de B et C.
6. Retrouver A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Problème 2

Partie 1

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det(M) = ad - bc$ est le déterminant de M.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.
3. En déduire que, si M est une matrice inversible, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Dans toute la suite du problème, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de $\mathbb{Z}$ et on note : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau.
2. On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   (a) Rappeler la définition d'un élement inversible dans un anneau. Donner les inversibles de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}^\times$.
   (b) Démontrer que l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   (c) En utilisant la partie 1, montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.
   (d) En déduire que
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1.$$
3. On pose
   $$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \Big/ ad - bc = 1 \right\}.$$
   (a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.
   (b) Trouver un couple d'**entiers** $(c_0, d_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $3c_0 - 5d_0 = 1$.
   (c) En déduire que l'ensemble des couples d'**entiers** $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$ sont exactement les couples d'entiers (c, d) tels que $c = c_0 + 5k$ et $d = d_0 + 3k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   (d) Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.
   (e) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ pour qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?

Le CoRRiGe

Problème 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$. $A^0 = I_3$.
2. On procède par récurrence :
   Initialisation : Pour $n=0$, le rśultat est trivial avec $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ car $A^0 = I_3$.
   Hérédité : Soit n tel que la propriété est vraie. Montrons le pour $n+1$.
   $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + (1-p)c_n & pc_n + 1 - p & 1 \end{pmatrix}$. Le résultat est donc vrai en posant $a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p)$, $b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = pc_n + 1 - p$.
3. $(c_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique donc, pour tout n, $c_n = p^n(0-1) + 1 = 1 - p^n$.
4. (a) Pour tout n, $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = -pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) + p^2 a_n$ $= -p^2 a_n - p^{n+1}(1-p) + p^{n+1}(1-p) + p^2 a_n = 0$
   (b) On a donc une suite rćurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $x^2 - 2px + p^2 = 0$ qui admet pour unique solution double p. Donc, pour tout n, $a_n = (\lambda n + \mu)p^n$ or $a_0 = 0$ donc $\mu = 0$ et $a_1 = 1 - p$ donc $\lambda = \frac{1-p}{p}$ et finalement, $a_n = np^{n-1}(1-p)$.
5. (a) On a $MU = U$ et $NU = U$ donc $(M+N)U = MU + NU = U + U = 2U$ donc la proposition est fausse.
   (b) $(MN)U = M(NU) = MU = U$ donc $MN \in \mathcal{C}$
   (c) $T = {}^t A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $TU = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = U$. D'après la question précédente, $T^2 = T \times T \in \mathcal{C}$ et donc par récurrence, $T^n \in \mathcal{C}$.
   (d) $T^n = {}^t(A^n)$.
   (e) D'après les deux questions précédentes, $T^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^n U = U$ donc $p^n + a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.
6. (a) On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et P est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Cette matrice est clairement inversible car les trois coefficients de la diagonale sont non nuls (et c'est une matrice triangulaire supérieure). En effectuant les mêmes transformations, on résoud $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient $z = a + b + c$, $y = -b$ et $x = a + b$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) $BP = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc
   $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est diagonale.
   (c) $B = PDP^{-1}$, $B^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & (-p)^n & 0 \\ 0 & -(-p)^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & p^n - (-p)^n & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 1 - p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (e) Remarquons que $BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc on peut appliquer le binôme de Newton,
   $A^n = (C+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} = B^n + nCB^{n-1}$
   (f) $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ np^{n-1}(1-p) & p^n & 0 \\ 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2

Partie 1

1. cf cours
2. On a $MN = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ donc
$\det(MN) = (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc')$
$= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc'$
$= aa'dd' + bc'cb' - ab'dc' - bd'ca'$
or $\det(M) \times \det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c') = aa'dd' + bb'cc' - adb'c' - a'd'bc$
d'où le résultat.
3. Si M est inversible alors $MM^{-1} = I_2$ donc $\det(M)\det(M^{-1}) = \det(I_2) = 1$ et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

Partie 2

1. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est clairement un sous anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) cf cours
   (b) cf cours (l'ensemble des inversible $A^\times$ est un groupe)
   (c) D'après la Partie 1, M est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $\det(M) \neq 0$. Mais si l'inverse est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, on obtient $\det(M)\det(M^{-1}) = 1$ avec $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ dans $\mathbb{Z}$ donc M inversible ssi $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times$.
   (d) Comme les inversibles de $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1, on a bien M inversible ssi $|\det(M)| = 1$ ssi $|ad - bc| = 1$.
3. (a)
   - $I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$.
   - Si M et N sont dans $SL_2(\mathbb{Z})$ alors $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1 \times 1 = 1$ donc $MN \in SL_2(\mathbb{Z})$.
   - Si $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, $det(M) = 1$ donc M est inversible d'après la question précédente. Et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = 1$ donc $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

   (b) $c_0 = 2$ et $d_0 = 1$ conviennent.
   (c) La matrice appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$ ssi $3c - 5d = 1$ ssi $3c - 5d = 3c_0 - 5d_0$ ssi $5(d - d_0) = 3(c - c_0)$. 5 et 3 sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $d = 1 + 3k$ et $c = 2 + 5k$.
   (d) cf ci-dessus.
   (e) D'après Bezout, si et seulement si $a \wedge b = 1$.

Bonus

1. Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, on peut trouver une suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $x_n \to a$ or $f(x_n) = 0$ mais $f(a) \neq 0$ donc on n'a pas $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, fixons $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$.
Dans l'intervalle $[a - 1, a + 1]$, il y a un nombre fini de rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ avec $1 \leq q \leq N$. En effet, on a forcément $|p| \leq (|a| + 1) \times q \leq (|a| + 1) \times N$ et il y a un nombre fini de choix de p et q possibles.
De plus, aucun de ces $\frac{p}{q}$ n'est égal à a, puisque a est irrationnel.
On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$ qui s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 1$, on a $q \geq N$. On en déduit que, pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, ou bien x est irrationnel ou nul et $|f(x)| = 0$; ou bien x est rationnel et par le choix de δ, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.
Ainsi, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$ ce qui donne bien $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
3. Si $a = 0$, la preuve du point 2 fonctionne encore en enlevant les quotient p/q avec $p = 0$.