Devoir Maison N° 13

Espaces Vectoriels

Endomorphismes cycliques

d'après E.M. Lyon 2001

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note Id l'application identique de E.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{Id}$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément $\vec{a}$ de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(\vec{a}) = \vec{a}$
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est génératrice de E
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est alors appelée cycle de E.

Partie I – Exemples

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$.
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$.

1.a Montrer que f est en endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1.b En considérant $\vec{a} = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p, l'entier p étant à préciser.

2. Dans cette question $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$.

2.a Déterminer la dimension de E.

2.b Soit $p \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$. Pour $f \in E$, on note $\tau_p(f)$ l'application définie par $\tau_p(f) : x \mapsto f(x + \frac{2\pi}{p})$.
Montrer que $\tau_p(f) \in E$.

2.c Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E.

2.d On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$.
Observer que, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ on a $\tau_p^k(f) = \tau_p^\ell(f) \Rightarrow k = \ell\ [p]$.

2.e Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p.

Partie II – Etude générale

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p.
Soit $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{p-1}(\vec{a}))$ un cycle de f.

1. Montrer $p \geq n$.

2.a Observer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(\vec{a})) = f^k(\vec{a})$.

2.b En déduire que $f^p = \mathrm{Id}$.
L'endomorphisme f est-il bijectif ?

2.c Par quel argument rapide pourrait-on justifier que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(\mathrm{Id} + f + ... + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de E ? Etablir qu'ils sont supplémentaires.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{k-1}(\vec{a}))$ soit libre.

3.a Montrer que $f^m(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{m-1}(\vec{a})$.

3.b Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(\vec{a})$ est combinaison linéaire des m vecteurs $\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{m-1}(\vec{a})$.

3.c En déduire que $m = n$ et que la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), ..., f^{n-1}(\vec{a}))$ est une base de E.

4. Soit g un endomorphisme commutant avec f i.e. tel que $g \circ f = f \circ g$.
On note $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ les n nombres réels tels que : $g(\vec{a}) = \alpha_0.\vec{a} + \alpha_1.f(\vec{a}) + ... + \alpha_{n-1}f^{n-1}(\vec{a})$.
On considère h l'endomorphisme de E défini par $h = \alpha_0.\mathrm{Id} + \alpha_1.f + ... + \alpha_{n-1}.f^{n-1}$.

4.a Montrer que f et h commutent.

4.b Montrer que $\forall k \in \mathrm{N}, g(f^k(\vec{a})) = h(f^k(\vec{a}))$.

4.c En déduire que $g = h$.

4.d Quels sont les endomorphismes de E commutant avec f ?

Correction

Partie I

1.a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bien définie.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (z, t) \in \mathbb{R}^2$.
$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = (-(\lambda y + \mu t), \lambda x + \mu z) = \lambda.f(\vec{x}) + \mu.f(\vec{y})$
Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

1.b $\vec{a} = (1,0), f(\vec{a}) = (0,1), f^2(\vec{a}) = (-1,0), f^3(\vec{a}) = (0,-1)$. On a :
(i) $f^4(\vec{a}) = (1,0) = \vec{a}$,
(ii) $(\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}), f^3(\vec{a}))$ génératrice (contient la base canonique),
(iii) $(\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}), f^3(\vec{a}))$ formée d'éléments distincts.
Donc f est cyclique d'ordre 4.

2.a Supposons $\lambda.\sin + \mu.\cos = 0$.
On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $\mu = 0$, pour $x = \pi/2$, on obtient $\lambda = 0$.
La famille $(\sin, \cos)$ est donc libre et par suite forme une base de $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. Il en découle $\dim E = 2$.

2.b Soit $f = \lambda.\sin + \mu.\cos \in E$.
$$\tau_p(f)(x) = \lambda.\sin(x + \frac{2\pi}{p}) + \mu.\cos(x + \frac{2\pi}{p}) = \alpha \sin x + \beta \cos x$$
avec $\alpha = (\lambda.\cos\frac{2\pi}{p} - \mu\sin\frac{2\pi}{p}), \beta = (\lambda.\sin\frac{2\pi}{p} + \mu.\cos\frac{2\pi}{p})$
donc $\tau_p(f) = \alpha.\sin + \beta.\cos \in E$.

2.c On vient d'observer $\tau_p.E \to E$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\tau_p(\lambda.f + \mu.g)(x) = (\lambda.f + \mu.g)(x + \frac{2\pi}{p}) = \lambda.f(x + \frac{2\pi}{p}) + \mu.g(x + \frac{2\pi}{p}) = \lambda.\tau_p(f)(x) + \mu.\tau_p(g)(x)$$
Ainsi $\tau_p(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\tau_p(f) + \mu.\tau_p(g)$.
Finalement $\tau_p \in L(E)$.

2.d $\tau_p(f) : x \mapsto \sin(x + \frac{2\pi}{p})$, $\tau_p^2(f) : x \mapsto \sin(x + \frac{4\pi}{p})$, ...

Par récurrence $\tau_p^k(f) : x \mapsto \sin(x + \frac{2k\pi}{p}) = \cos\frac{2k\pi}{p}\sin x + \sin\frac{2k\pi}{p}\cos x$.

Si $\tau_p^k(f)=\tau_p^\ell(f)$ alors $\forall x\in\mathbb{R}, \cos\frac{2k\pi}{p}\sin x+\sin\frac{2k\pi}{p}\cos x=\cos\frac{2\ell\pi}{p}\sin x+\sin\frac{2\ell\pi}{p}\cos x$.

Or $(\sin,\cos)$ est libre, donc $\begin{cases}\cos\frac{2k\pi}{p}=\cos\frac{2\ell\pi}{p}\\ \sin\frac{2k\pi}{p}=\sin\frac{2\ell\pi}{p}\end{cases}$ puis $k=\ell\quad[p]$.

2.e On a :

(i) $\tau_p^p(f)=f$.

(ii) $\sin=f$ et $\cos=\lambda.f+\mu.\tau_p(f)$ avec $\lambda=-\frac{\cos(2\pi/p)}{\sin(2\pi/p)}$ et $\mu=\frac{1}{\sin(2\pi/p)}$ ($\sin(2\pi/p)\neq 0$ car $p>2$).

Par suite $(f,\tau_p(f))$ est génératrice et ainsi $(f,\tau_p(f),...,\tau_p^{p-1}(f))$ aussi.

(iii) $(f,\tau_p(f),...,\tau_p^{p-1}(f))$ est formée d'éléments distincts grâce à 2.d.

Ainsi τ_p est cyclique d'ordre p.

Partie II

1. Une famille génératrice a plus d'éléments que la dimension de l'espace généré. C'est ainsi que $p\geq n$.

2.a $f^p(f^k(\vec{a}))=f^{p+k}(\vec{a})=f^k(f^p(\vec{a}))=f^k(\vec{a})$.

2.b Soit $\vec{x}\in E$. Puisque $(\vec{a},f(\vec{a}),...,f^{p-1}(\vec{a}))$ est génératrice, on peut écrire :

$\vec{x}=\lambda_0.\vec{a}+\lambda_1 f(\vec{a})+...+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{a})$. On a alors :

$f^p(\vec{x})=\lambda_0.f^p(\vec{a})+\lambda_1 f^{p+1}(\vec{a})+...+\lambda_{p-1}f^{2p-1}(\vec{a})=\lambda_0.\vec{a}+\lambda_1 f(\vec{a})+...+\lambda_{p-1}f^{p-1}(\vec{a})=\vec{x}$

Ainsi $f^p=\mathrm{Id}$. On a $f\circ f^{p-1}=f^{p-1}\circ f=\mathrm{Id}$ donc f est bijective et $f^{-1}=f^{p-1}$.

2.c $F=\ker(f-\mathrm{Id})$ et $G=\ker(\mathrm{Id}+f+...+f^{p-1})$ sont des noyaux d'endomorphismes donc des sous-espaces vectoriels.

Soit $\vec{x}\in F\cap G$.

On a $f(\vec{x})-\vec{x}=\vec{o}$ et $\vec{x}+f(\vec{x})+...+f^{p-1}(\vec{x})=\vec{o}$

donc $p.\vec{x}=\vec{o}$ puis $\vec{x}=\vec{o}$.

Ainsi $F\cap G\subset\{\vec{o}\}$ puis $F\cap G=\{\vec{o}\}$.

Soit $\vec{x}\in E$.

Posons $\vec{u}=\frac{\vec{x}+f(\vec{x})+...+f^{p-1}(\vec{x})}{p}$ et $\vec{v}=\vec{x}-\vec{u}$.

$\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$.

$f(\vec{u})=\vec{u}$ (car $f^n(\vec{x})=\vec{x}$) donc $\vec{u}\in\ker(f-\mathrm{Id})$.

$(\mathrm{Id}+f+...+f^{n-1})(\vec{v})=(\mathrm{Id}+f+...+f^{p-1})(\vec{x}-\vec{u})$ donne

$(\mathrm{Id}+f+...+f^{n-1})(\vec{v})=(\mathrm{Id}+f+...+f^{p-1})(\vec{x})-(\mathrm{Id}+f+...+f^{p-1})(\vec{u})=p.\vec{u}-p.\vec{u}=\vec{o}$

donc $\vec{v}\in\ker(\mathrm{Id}+f+...+f^{n-1})$.

Ainsi $E\subset F+G$ puis $E=F+G$.

Finalement F et G supplémentaires dans E.

3.a La famille $(\vec{a},f(\vec{a}),...,f^{m-1}(\vec{a}))$ est libre.

La famille ($\vec{a},f(\vec{a}),...,f^m(\vec{a})$) est liée donc on peut écrire :

$\lambda_0\vec{a}+\lambda_1 f(\vec{a})+...+\lambda_m f^m(\vec{a})=\vec{o}$ avec $(\lambda_0,...,\lambda_m)\neq(0,...,0)$.

Si $\lambda_m=0$ alors on obtient une relation linéaire sur $(\vec{a},f(\vec{a}),...,f^{m-1}(\vec{a}))$ ce qui est impossible puisque cette famille est libre.

Nécessairement $\lambda_m\neq 0$ et on peut alors écrire $f^m(\vec{a})=\mu_0.\vec{a}+...+\mu_{m-1}f^{m-1}(\vec{a})$ avec $\mu_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$.

3.b Par récurrence sur $k \geq m$.
$k = m$: ci dessus.
Supposons la propriété établir au rang $k \geq m$.
Par HR, on peut écrire $f^k(\vec{a}) = \alpha_0.\vec{a} + \ldots + \alpha_{m-1}f^{m-1}(\vec{a})$.
En appliquant f : $f^{k+1}(\vec{a}) = \alpha_0 f(\vec{a}) + \ldots + \alpha_{m-1}f^m(\vec{a})$
Or $f^m(\vec{a}) = \mu_0.\vec{a} + \ldots + \mu_{m-1}f^{m-1}(\vec{a})$ donc
$f^{k+1}(\vec{a}) = \alpha_{m-1}\mu_0.\vec{a} + (\alpha_0 + \alpha_{m-1}\mu_1)f(\vec{a}) + \ldots + (\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}\mu_{m-1})f^{m-1}(\vec{a})$
Récurrence établie

3.c De part 3.b, on peut affirmer $E = \text{Vect}(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a})) = \text{Vect}(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{m-1}(\vec{a}))$.
$(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{m-1}(\vec{a}))$ est donc génératrice, et puisque libre, c'est une base de E. Il en découle $m = n$ et $(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{n-1}(\vec{a}))$ base de E.

4.a $h \circ f = \alpha_0 f + \ldots + \alpha_{n-1}f^n = f \circ h$.

4.b On a clairement $g(\vec{a}) = h(\vec{a})$.
Puisque f et g commutent, f^k et g commutent.
Il en est de même pour f^k et h. Ainsi $g(f^k(\vec{a})) = (g \circ f^k)(\vec{a}) = (f^k \circ g)(\vec{a}) = f^k(g(\vec{a}))$ donne
$g(f^k(\vec{a})) = f^k(h(\vec{a})) = (f^k \circ h)(\vec{a}) = (h \circ f^k)(\vec{a}) = h(f^k(\vec{a}))$

4.c Les endomorphismes g et h prennent mêmes valeurs sur une base, ils sont donc égaux.

4.d De part l'étude menée, tout endomorphisme commutant avec f peut s'écrire sous la forme
$\alpha_0.\text{Id} + \alpha_1.f + \ldots + \alpha_{n-1}.f^{n-1}$.
La réciproque s'observe comme en 4.a.