Devoir Maison N° 14

Espaces Vectoriels II

Dimension finie

Problème 1 —

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n et g_n les fonctions telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \cos^n(x)$$

En particulier, f_0 et g_0 sont la fonction constante égale à 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \operatorname{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \qquad \text{et} \qquad G_n = \operatorname{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

F_n et G_n sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Partie I – Cas particulier

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $f_k \in G_2$. En déduire que $F_2 \subset G_2$.
2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Quelle est la dimension de F_2 ?
3. Montrer que la famille (g_0, g_1, g_2) est libre. Quelle est la dimension de G_2 ?
4. En déduire que $F_2 = G_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.
2. Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in G_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset G_n$.

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Calculer $I_{k,l} = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t) f_l(t)\, dt$ pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera plusieurs cas.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
3. En déduire la dimension de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que $\dim G_n \leq n + 1$.
5. Prouver que $F_n = G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PROBLÈME 1 — (SYMÉTRIES D'UN ESPACE VECTORIEL).

L'objectif principal de ce problème est d'étudier les propriétés des symétries dans un espace vectoriel, de manière analogue à ce que nous avons vu en classe pour les projections.

Rappel des notations et définitions du cours. Soit E un $\mathbb{K}$-ev ; soient F et G deux sev supplémentaires de E (c'est à dire : $E = F \bigoplus G$).

Dans ce contexte : $\quad \forall \overrightarrow{v} \in E, \quad \exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}.$

Ces hypothèses et notations étant posées, on appelle :

- **projection sur F parallèlement à G** l'application p_F de E dans E définie en posant $p_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f}$;
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application s_F de E dans E définie en posant
$$s_F\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}.$$

Partie I — Exemple

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$, et on note G l'ensemble des matrices de E de trace nulle.

1/ Montrer que G est un sev de E, et en déterminer une famille génératrice.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3/ Donner l'expression de la projection p_F sur F parallèlement à G.[*]

4/ Donner l'expression de la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à G.

*. Il s'agit d'expliciter l'image d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par l'application p_F.

Partie II — Généralités sur les projections et symétries

On revient à présent au cas général : dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev, et F et G deux sev supplémentaires dans E ($E = F \bigoplus G$).

5/ Montrer que l'application s_F est un endomorphisme de E.

6/ Justifier que $s_F \in \mathrm{GL}(E)$.

7/ Etablir une relation entre les endomorphismes s_F, p_F et p_G.

8/ Déterminer $\ker(s_F - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s_F + \mathrm{id}_E)$.

Partie III — Réflexions dans un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev. Un endomorphisme f de E est appelé une **réflexion** si $f^2 = \mathrm{id}_E$; en d'autres termes, une réflexion de E est une involution linéaire de E.

Soit s un endomorphisme de E.

9/ Montrer que si s est une réflexion, alors $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$.

10/ Réciproquement, montrer que si $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$, alors l'endomorphisme s est une réflexion.

Partie IV — Synthèse : toute réflexion est une symétrie

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-ev, et s un endomorphisme de E.

11/ Montrer que si s est une réflexion, alors s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, où F et G sont deux sev de E que l'on précisera.

Partie V — Application

On définit une application $u : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ en posant pour toute $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$:

$$u(M) = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

On admet que u est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

12/ Etablir que $\ker\left(u - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$, où M_1 et M_2 sont deux matrices que l'on explicitera.

13/ Déterminer $\ker\left(u + \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{K})}\right)$, et en préciser une famille génératrice.

14/ Montrer que : $\quad \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) = \ker(u - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(u + \mathrm{id}_E)$.

Problème 2 — (Etude d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Dans tout le problème, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.

On note $\mathbf{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, c'est à dire que $\mathbf{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout élément f de $\mathbf{E}$, on note $U(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [U(f)]\,(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie I — Généralités sur l'application U

1/ Soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

2/ On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **a/** Montrer que si f est T-périodique, alors f' est T-périodique.
- **b/** Montrer que la réciproque de l'implication précédente est fausse, en exhibant un exemple de fonction dérivable f telle que f' est périodique, mais f ne l'est pas.

3/ On revient au cas général, en considérant $f \in \mathbf{E}$. Etablir que $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

4/ Montrer que l'application U qui à f associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

Partie II — Restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathbf{E_n} = \mathbb{R}_n[X]$.

5/ Soit k un entier de $[\![\, 0, n \,]\!]$. Etablir que $U\left(X^k\right)$ est une fonction polynomiale de degré k.

6/ Montrer que la restriction $U_{|\mathbf{E_n}}$ de U à $\mathbf{E_n}$ définit un endomorphisme de $\mathbf{E_n}$ (par la suite, on notera U_n cet endomorphisme).

7/ On note $\mathscr{F}$ la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$.

- **a/** Justifier que la famille $\mathscr{F}$ est libre.
- **b/** En déduire que U_n est injectif. Puis établir que U_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III — Noyau de U

8/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Justifier que si f appartient à $\ker(U)$, alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,;$ $\qquad$ (ii) f est périodique de période 1

9/ A-t-on : $\ker(U) = \left\{ f \in \mathbf{E} \,/\, f \text{ pérodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

10/ L'endomorphisme U est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Problème 1 — Polynômes de Tchebychev

Partie I – Cas particulier

1. $f_0 = g_0$ donc $f_0 \in G_2$. De même, $f_1 = g_1$ donc $f_1 \in G_2$. Enfin, $f_2 = 2g_2 - g_1$ donc $f_2 \in G_2$. Puisque G_2 est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. Ainsi $F_2 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2) \subset G_2$.

2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$. En particulier,

$$\begin{cases} \lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) = 0 \\ \lambda_0 f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 f_0(\pi) + \lambda_1 f_1(\pi) + \lambda_2 f_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (f_0, f_1, f_2) est donc libre. Puisqu'elle engendre F_2, c'est une base de F_2 et $\dim F_2 = 3$.

3. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$. En particulier,

$$\begin{cases} \lambda_0 g_0(0) + \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = 0 \\ \lambda_0 g_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_1 g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lambda_0 g_0(\pi) + \lambda_1 g_1(\pi) + \lambda_2 g_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit sans peine que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (g_0, g_1, g_2) est donc libre. Puisqu'elle engendre G_2, c'est une base de G_2 et $\dim G_2 = 3$.

4. Puisque $F_2 \subset G_2$ et $\dim F_2 = \dim G_2$, $F_2 = G_2$.

Partie II – Une inclusion

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos\frac{(n+2)x + nx}{2}\cos\frac{(n+2)x - nx}{2} = 2\cos((n+1)x)\cos x$$

Ainsi $f_{n+2} + f_n = 2f_{n+1}f_1$ ou encore $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n$.

2. Tout d'abord, $f_0 \in G_0$ puisque $f_0 = g_0$ et $f_1 \in G_1$ puisque $f_1 = g_1$.
Supposons que $f_n \in G_n$ et $f_{n+1} \in G_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. A fortiori, $f_n \in G_{n+2}$ puisque $G_n \subset G_{n+2}$. De plus, $f_{n+1} \in G_{n+1} = \text{vect}(g_0, \dots, g_{n+1})$ donc

$$f_{n+1}f_1 =\in \text{vect}(g_0\cos, \dots, g_{n+1}\cos) = \text{vect}(g_1, \dots, g_{n+2}) \subset G_{n+2}$$

Donc $f_{n+2} = 2f_{n+1}f_1 - f_n \in G_{n+2}$.
Par récurrence double, $f_n \in G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in \mathrm{G}_k$ et a fortiori, $f_k \in \mathrm{G}_n$. G_n étant stable par combinaison linéaire,

$$\mathrm{F}_n = \mathrm{vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \mathrm{G}_n$$

Partie III – Utilisation de la dimension

1. Par linéarisation, on trouve $\mathrm{I}_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\mathrm{I}_{k,l} = \pi$ si $k = l \neq 0$ et $\mathrm{I}_{0,0} = 2\pi$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Soit $l \in [\![0, n]\!]$. On a donc $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k f_l = 0$. En intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient par linéarité de l'intégrale $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{I}_{k,l} = 0$ ou encore $\lambda_l = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $\lambda_l = 0$ pour tout $l \in [\![0, n]\!]$. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est donc libre.

3. Puisque $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et engendre F_n, c'est une base de F_n. Il s'ensuit que $\dim \mathrm{F}_n = n + 1$.

4. $(g_0, \dots, g_n)$ est une famille de $n + 1$ éléments engendrant G_n. On a donc nécessairement $\dim \mathrm{G}_n \leq n + 1$.

5. Puisque $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$, $\dim \mathrm{F}_n \leq \mathrm{G}_n$. Or $\dim \mathrm{F}_n = n+1$ et $\dim \mathrm{G}_n \leq n+1$ donc $\dim \mathrm{G}_n = \dim \mathrm{F}_n = n+1$. Ainsi $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$ et $\dim \mathrm{F}_n = \dim \mathrm{G}_n$ donc $\mathrm{F}_n = \mathrm{G}_n$.

Partie I — Exemple

Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$, et on note G l'ensemble des matrices de E de trace nulle.

1/ a/ Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Alors : $[M \in G]$

$$\iff \left[\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] \iff [\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}]$$

On en déduit que : $\boxed{G = \mathrm{Vect}\left((E_{11} - E_{22}), E_{12}, E_{21}\right) \text{ (en particulier } G \text{ est un sev de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}))}$.

b/ Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe quatre réels a, b, c et d tels que : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche à présent quatre réels x, y, z et t tels que : $M = x\mathrm{I}_2 + y(E_{11} - E_{22}) + zE_{12} + tE_{21}$. Cette égalité entre matrices donne lieu au système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ z = b \\ t = c \\ x - y = d \end{cases} \text{ dont la résolution aisée donne : } \begin{cases} x = (a+d)/2 \\ z = b \\ t = c \\ y = (a-d)/2 \end{cases}$$

Ainsi, la matrice M peut s'écrire comme somme d'une matrice dans F et d'une matrice dans G, explicitement :

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

En outre, cette écriture est unique (unicité de la solution du système précédent). Par suite : $\boxed{\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = F \bigoplus G}$.

c/ D'après la question précédente, la projection p_F sur F parallèlement à G est donnée par :

$$\boxed{\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ p_F(M) = \begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix}}.$$

d/ D'après la question précédente, la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à G est donnée par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ s_F(M) = \begin{pmatrix} (a+d)/2 & 0 \\ 0 & (a+d)/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a-d)/2 & b \\ c & (d-a)/2 \end{pmatrix}$$

soit : $\boxed{\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ s_F(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Partie II — Généralités sur les projections et symétries

On revient à présent au cas général : dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev, et F et G deux sev supplémentaires dans E ($E = F \bigoplus G$).

5/ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in E$, et soient λ et μ deux scalaires. Par hypothèse, il existe $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ dans F, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g'}$ dans G uniques tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{g'}$. Alors on a : $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}\right)}_{\in G}$.

D'où :

$$s_F(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{f'}\right) - \left(\lambda\overrightarrow{g} + \mu\overrightarrow{g'}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}\right) + \mu\left(\overrightarrow{f'} - \overrightarrow{g'}\right) = \lambda s_F(\overrightarrow{u}) + \mu s_F(\overrightarrow{v})$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } s_F \in \mathscr{L}(E)}$.

6/ D'après la question précédente, s_F est linéaire, et il est clair que $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ (s_F est une involution). Donc s_F est un automorphisme (endomorphisme bijectif) de E. **Conclusion**. $s_F \in \mathrm{GL}(E)$.

7/ Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Par hypothèse : $\exists! \left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right) \in F \times G, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

Or, par définition : $\overrightarrow{f} = p_F(\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{g} = p_G(\overrightarrow{v})$ et $s_F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.

On a donc : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s_F(\overrightarrow{v}) = p_F(\overrightarrow{v}) - p_G(\overrightarrow{v})$.

Conclusion. $s_F = p_F - p_G$.

8/ Par définition des projections p_F et p_G, on a : $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$. Ainsi : $s_F - \mathrm{id}_E = -2p_G$.
Par suite : $\ker(s_F - \mathrm{id}_E) = \ker(-2p_G) = \ker(p_G) = F$.

De manière analogue : $s_F + \mathrm{id}_E = 2p_F$. Par suite : $\ker(s_F + \mathrm{id}_E) = \ker(2p_F) = \ker(p_F) = G$.

Conclusion. $\ker(s_F - \mathrm{id}_E) = F$ et $\ker(s_F + \mathrm{id}_E) = G$.

Partie III — Réflexions dans un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev. Un endomorphisme f de E est appelé une **réflexion** si $f^2 = \mathrm{id}_E$; en d'autres termes, une réflexion de E est une involution linéaire de E.

9/ Supposons que s soit une réflexion ; on a donc $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{id}_E$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E. Procédons par analyse-synthèse pour établir que $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

➤ Analyse : supposons qu'il existe $\overrightarrow{f} \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$ tels que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$. Alors : $s(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f}\right) + s(\overrightarrow{g})$ d'où $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$. On a donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} \\ \\ s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g} \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} \overrightarrow{f} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v})) \\ \\ \overrightarrow{g} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v})) \end{cases}$$

➤ Synthèse : on écrit donc $\overrightarrow{v} = \underbrace{\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v}))}_{=\overrightarrow{v_1}} + \underbrace{\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v}))}_{=\overrightarrow{v_2}}$.

On a : $s(\overrightarrow{v_1}) = s\left(\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v}))\right) = \dfrac{1}{2}\left(s(\overrightarrow{v}) + \underbrace{s^2(\overrightarrow{v})}_{=s(\overrightarrow{v})}\right) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v})) = \overrightarrow{v_1}$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{v_1} \in \ker(s - \mathrm{id}_E) \quad (\spadesuit)}$

Et : $s(\overrightarrow{v_2}) = s\left(\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v}))\right) = \dfrac{1}{2}\left(s(\overrightarrow{v}) - \underbrace{s^2(\overrightarrow{v})}_{=s(\overrightarrow{v})}\right) = -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v})) = -\overrightarrow{v_2}$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{v_2} \in \ker(s + \mathrm{id}_E) \quad (\clubsuit)}$

On déduit alors de ($\spadesuit$) et de ($\clubsuit$) que : $\boxed{E = \ker(s - \mathrm{id}_E) + \ker(s + \mathrm{id}_E) \quad (\heartsuit)}$.

Enfin, soit $\overrightarrow{v} \in \ker(s-\mathrm{id}_E) \cap \ker(s+\mathrm{id}_E)$. Alors : $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ et $s(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ d'où $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$ et par suite : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Donc : $\boxed{\ker(s-\mathrm{id}_E) \cap \ker(s+\mathrm{id}_E) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \ (\diamondsuit)}$.

On déduit alors de $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ et de la caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires que :

$$E = \ker(s-\mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s+\mathrm{id}_E).$$

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $[s^2 = \mathrm{id}_E] \Longrightarrow [E = \ker(s-\mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s+\mathrm{id}_E)]$.

10/ Réciproquement, soit s un endomorphisme de E tel que : $E = \ker(s-\mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s+\mathrm{id}_E)$. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Par hypothèse il existe alors $\overrightarrow{f} \in \ker(s-\mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s+\mathrm{id}_E)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.

On a alors : $s(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right) = s\left(\overrightarrow{f}\right) + s(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.

Puis : $s^2(\overrightarrow{v}) = s\left(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}\right) = s\left(\overrightarrow{f}\right) - s(\overrightarrow{g}) = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = \overrightarrow{v}$.

En résumé : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s^2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. D'où $s^2 = \mathrm{id}_E$; s est donc une réflexion.

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $[E = \ker(s-\mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s+\mathrm{id}_E)] \Longrightarrow [s^2 = \mathrm{id}_E]$.

Partie IV — Synthèse : toute réflexion est une symétrie

11/ Supposons que s est une réflexion. D'après la question 9 : $E = \ker(s-\mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s+\mathrm{id}_E)$.
Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Il existe alors $\overrightarrow{f} \in \ker(s-\mathrm{id}_E)$ et $\overrightarrow{g} \in \ker(s+\mathrm{id}_E)$ uniques tels que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$.
D'où : $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.
Par ailleurs, en notant σ la symétrie par rapport à $F = \ker(s-\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \ker(s+\mathrm{id}_E)$ (qui est bien définie puisque $E = F \bigoplus G$), on a : $\sigma(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{g}$.
D'où : $\forall \overrightarrow{v} \in E,\ s(\overrightarrow{v}) = \sigma(\overrightarrow{v})$. Donc : $s = \sigma$.

Conclusion. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Si s est une réflexion, alors s est la symétrie par rapport à $\ker(s-\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s+\mathrm{id}_E)$.

Partie V — Application

On définit une application $u : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en posant : $u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$. On admet que u est un endomorphisme de E.

12/ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$[M \in \ker(u-\mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow [u(M) = M] \Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [b = a \wedge d = c].$$

Ainsi : $[M \in \ker(u-\mathrm{id}_E)] \Longleftrightarrow \left[\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right]$

$$\Longleftrightarrow \left[\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow [\exists (a,c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a(E_{11}+E_{12}) + c(E_{21}+E_{22})]$$

Conclusion. $\ker(u-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(E_{11}+E_{12}, E_{21}+E_{22})$.

13/ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$[M \in \ker(u + \mathrm{id}_E)] \iff [u(M) = -M] \iff \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a \\ -d & -c \end{pmatrix}\right] \iff [b = -a \wedge d = -c].$$

Ainsi : $[M \in \ker(u + \mathrm{id}_E)] \iff \left[\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}\right]$

$$\iff \left[\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] \iff [\exists (a, c) \in \mathbb{R}^2,\ M = a(E_{11} - E_{12}) + c(E_{21} - E_{22})]$$

Conclusion. $\ker(u + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\,(E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22})$.

14/ u est clairement une réflexion de $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. D'après la question 11 : $\boxed{E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \bigoplus \ker(s + \mathrm{id}_E)}$.

Problème 2 — **(Etude d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).**

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales. On note $\mathbf{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, c'est à dire que $\mathbf{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout f de $\mathbf{E}$, on note $U(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad [U(f)](x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Partie I — Généralités sur l'application U

1/ Soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$: question de cours !

Dans le détail : soit $f \in \mathbf{E}$, T-périodique, et soit a un réel quelconque. Il existe un unique entier relatif n tel que $nT \leqslant a < (n+1)T$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^{(n+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=I_1} + \underbrace{\int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=I_2} \qquad (\spadesuit)$$

Dans l'intégrale I_1, on effectue le changement de variable $u = x - nT$:

$$I_1 = \int_a^{(n+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-nT}^{T} \underbrace{f(u + nT)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{a-nT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\heartsuit)$$

Dans l'intégrale I_2, on effectue le changement de variable $u = x - (n+1)T$:

$$I_2 = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{a-nT} \underbrace{f(u + (n+1)T)}_{=f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{a-nT} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-nT}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{a-nT} f(u)\,\mathrm{d}u$

Une nouvelle application de la relation de Chasles permet de conclure : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

Puisque le réel a est arbitraire dans le raisonnement précédent, on a établi que :

$\boxed{\text{Si } f \in \mathbf{E} \text{ est } T\text{-périodique, alors : } \forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$.

2/ a/ Supposons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et T-périodique. D'après la formule donnant la dérivée d'une fonction composée, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$. Il s'ensuit que f' est T-périodique.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \text{Pour } f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ on a : } f\ T\text{-périodique} \Longrightarrow f'\ T\text{-périodique}}$.

b/ La fonction $f = \sin + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $\cos + \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, qui est 2π-périodique (alors que f ne l'est pas, par exemple car elle est non bornée). La réciproque de l'implication du a/ est donc fausse.

3/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Pour tout réel x, on a : $U(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il s'ensuit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ‡

De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall f \in \mathbf{E},\ U(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)}$.

4/ Soient f et g dans $\mathbf{E}$, λ et μ deux réels. Pour tout réel x, on a :

$$U(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$U(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t\right] + \mu\lambda\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x-1} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

Autrement écrit : $U(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda U(f)(x) + \mu U(g)(x)$. Cette relation étant valable pour un réel x arbitraire, on en déduit que : $U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$. Ce qui établit la linéarité de U.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ U \in \mathscr{L}(\mathbf{E})}$.

Partie II — Restriction de U à $\mathbb{R}_n[X]$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On note $\mathbf{E_n} = \mathbb{R}_n[X]$.

5/ En identifiant un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée, on a :

$$U(X^j) = \frac{1}{j+1}\left[X^{j+1} - (X-1)^{j+1}\right]$$

Or : $(X-1)^{j+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i+1}X^i = X^{j+1} - \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i}X^i$.

Il s'ensuit que : $U(X^j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i}(-1)^{j-i}X^i$. Il est clair que : $\deg(U(X^j)) = j$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall j \in [\![0, n]\!],\quad \deg(U(X^j)) = j}$.

6/ La restriction $U_{|\mathbf{E_n}}$ de U à $\mathbf{E_n}$ est linéaire d'après la question 4, et est à valeurs dans $\mathbf{E_n}$ d'après la question précédente. Ainsi, U induit un endomorphisme de $\mathbf{E_n}$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ U_{|\mathbf{E_n}} \in \mathscr{L}(\mathbf{E_n})}$.

‡. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0, qui est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$. La seconde intégrale est la composée de cette primitive avec une fonction affine ; d'après les théorèmes généraux, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{x-1} f(t)\,dt$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7/ a/ D'après la question 5, la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls ; à ce titre, elle est libre.[§]

Conclusion. La famille $\mathscr{F} = \{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

b/ Soit $P \in \ker U_n$. Le polynôme P appartenant à $\mathbf{E_n}$: $\exists!\ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Ces observations faites, on a : $U_n(P) = 0$ (puisque $P \in \ker U_n$).

Par ailleurs : $U_n(P) = U_n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k U_n\left(X^k\right)$ (par linéarité de U_n).

La famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ étant libre (question précédente), on en déduit que les a_k sont tous nuls. Par conséquent : $P = 0$.

On en déduit que $\ker(U_n) = \{0\}$. L'endomorphisme f est donc injectif.

D'autre part, la famille $\mathscr{B} = \{1, X, \ldots, X^n\}$ est génératrice de $\mathbf{E_n}$.[¶]

Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$. Or on a vu que la famille $\{U_n(1), U_n(X), \ldots, U_n(X^n)\}$ est libre ; puisqu'elle est de cardinal $(n+1)$ (égal à la dimension de $\mathbf{E_n}$), c'est une base de $\mathbf{E_n}$.

D'où : $\mathrm{im}(f) = \mathbf{E_n}$. On en déduit que l'endomorphisme f est surjectif.

Conclusion. L'endomorphisme f est injectif et surjectif. C'est donc un automorphisme de E.

Partie III — Noyau de U

8/ Soit $f \in \mathbf{E}$. Supposons que f appartient à $\ker U$. Alors : $U(f) = 0$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Cette relation est valide pour tout réel x, donc en particulier pour $x = 1$. Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

De plus, $U(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a : $U(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$ (question 3). Puisque la fonction $U(f)$ est la fonction nulle (par hypothèse), on a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(x-1) = 0$.

En résumé : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x-1)$. Il s'ensuit que f est 1-périodique.

Conclusion. Si f appartient à $\ker(U)$, alors : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et f est 1-périodique.

9/ Réciproquement, si une fonction est telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et f est 1-périodique, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ d'après la question 1. Ainsi $U(f) = 0$, donc $f \in \ker(U)$.

Conclusion. $\ker(U) = \left\{ f \in \mathbf{E} \,/\, f \text{ périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

§. Exercice classique.

¶. C'est même une base de $\mathbf{E_n}$, la base canonique.

10/ On déduit de la question précédente que $\ker(U)$ n'est pas réduit à la fonction nulle ; le noyau contient par exemple la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(2\pi x)$. Par suite, l'endomorphisme U n'est pas injectif.

Conclusion. Puisque $\ker(U) \neq \{0\}$, U n'est pas injectif.

D'après la question 3, l'endomorphisme U est à valeurs dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En d'autres termes, pour toute $f \in \mathbf{E}$, la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction valeur absolue, qui appartient à $\mathbf{E}$ mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, n'appartient pas à l'image de U. Par suite, l'endomorphisme U n'est pas surjectif.

Conclusion. L'endomorphisme U n'est pas surjectif.