Devoir Maison N° 15

Matrices 2

Matrices vs. Endomorphismes

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème 1 — Polynômes de Bernstein

Problématique. *L'objectif de ce problème est de présenter une famille de polynômes possédant certaines propriétés particulières. Explicitement, cette approche comporte trois parties : dans la première, on commence par étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. La seconde partie est consacrée à l'étude du commutant de cet endomorphisme, et la dernière à la généralisation d'une partie résultats précédents.*

Notations. Ci-dessous la liste des conventions et notations utilisées tout au long du problème 1.

- n désigne un entier naturel non-nul.
- On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, et $B_0 = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
- Pour tout k dans $[\![0; n]\!]$, on note R_k le polynôme $R_k = X^k (1 - X)^{n-k}$ (il est clair que $R_k \in E$).
- Tout polynôme P à coefficients réels pourra être identifié à la fonction polynomiale qui lui est associée.
- On définit une application $\Phi : E \longrightarrow E$ en posant pour tout polynôme $P \in E$:

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) R_k$$

$$\text{soit encore : } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}$$

Partie I — Etude d'un cas particulier ($n = 3$)

Dans les parties I et II, on supposera que $n = 3$**.** Par suite, **dans les parties I et II on a :**

$$R_0 = (1-X)^3\,; \qquad R_1 = X\,(1-X)^2\,; \qquad R_2 = X^2\,(1-X)\,; \qquad R_3 = X^3;$$

et

$$\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \Phi\,(P) = P\,(0)\,R_0 + 3P\left(\frac{1}{3}\right)R_1 + 3P\left(\frac{2}{3}\right)R_2 + P\,(1)\,R_3$$

1. Montrer que (R_0, R_1, R_2, R_3) est une famille libre de E. En déduire que c'est une base de E.

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

3. Vérifier que $\Phi\,(1) = 1$ et $\Phi\,(X) = X$.

4. Montrer que la matrice de Φ dans la base B_0 est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$

5. Quel est le rang de A ? Φ est-elle bijective ?

6. Déterminer Q_2 et Q_3, polynômes unitaires* de degrés respectifs 2 et 3 tels que :

$$\Phi\,(Q_2) = \frac{2}{3}\,Q_2 \qquad \text{et} \qquad \Phi\,(Q_3) = \frac{2}{9}\,Q_3.$$

7. On pose $B_1 = (1, X, Q_2, Q_3)$. Justifier que B_1 est une base de E.

8. Quelle est la matrice A' de Φ dans la base B_1 ?

9. Déterminer la matrice de passage K de B_0 à B_1. Déterminer K^{-1}.

10. Exprimer A en fonction de A' et de K.

Partie II — Etude d'un commutant ($n = 3$)

A, A' et K sont les matrices définies dans la partie I.

On note $\mathrm{M}_4\,(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à quatre lignes et quatre colonnes.

Enfin, on note F l'ensemble des matrices M de $\mathrm{M}_4\,(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

11. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_4\,(\mathbb{R})$.

12. Soit M une matrice de $\mathrm{M}_4\,(\mathbb{R})$ et soit $N = K^{-1}MK$. Montrer que M commute avec A si et seulement si N commute avec A'.

*. Un polynôme est dit *unitaire* (ou *normalisé*) lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

13. On pose :

$$N=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4}\\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4}\\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4}\end{pmatrix}$$

Calculer NA' et $A'N$. Montrer que N commute avec A' si et seulement si $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{3,4}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{4,2}$ et $\alpha_{4,3}$ sont nuls.

14. En déduire la dimension de $F'=\{N\in \mathrm{M}_4(R)\mid NA'=A'N\}$.

15. Soit Ψ l'application définie en posant pour toute matrice M de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$: $\Psi(M)=K^{-1}MK$. Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

16. Déduire de la question précédente la dimension de F.

Partie III — Retour au cas général ($n\in\mathbb{N}^*$)

On revient dans cette partie au cas général où n **désigne un entier naturel non nul quelconque**, et $E=\mathbb{R}_n[X]$.

On rappelle que pour tout k dans $[\![0;n]\!]$, R_k désigne le polynôme $R_k=X^k(1-X)^{n-k}$.

On rappelle également que Φ est l'application qui associe à tout polynôme P de E le polynôme :

$$\Phi(P)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P\left(\frac{k}{n}\right)R_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k}$$

17. Soit j un élément de $[\![0;n]\!]$. Etablir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}R_{k+j}=X^j$.

18. En déduire que $(R_0,R_1,\dots,R_n)$ est une famille génératrice de E, puis que c'est une base de E.

19. Montrer que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

20. Soit P appartenant à E tel que $\Phi(P)=0$. Justifier que pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, $\dfrac{k}{n}$ est racine de P. Qu'en déduit-on pour le polynôme P ?

21. Etablir alors que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel E.

FIN

CORRIGE

Partie I

1. Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\alpha_k R_k=0$. L'évaluation en 0 (*resp.* en 1) du terme de gauche donne $\alpha_0=0$ (*resp.* $\alpha_3=0$). De plus :

$$\alpha_1 R_1+\alpha_2 R_2=0 \iff \alpha_1 X(1-X)^2+\alpha_2 X^2(1-X)=0 \iff \alpha_1 X+(\alpha_2-2\alpha_1)X^2+(\alpha_1-\alpha_2)X^3=0$$

On déduit aisément de cette dernière identité $\alpha_1=0$, puis $\alpha_2=0$. En conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\alpha_k R_k=0 \Longrightarrow \forall\, k\in[\![\,0;3\,]\!],\ \alpha_k=0$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la famille } (R_0,R_1,R_2,R_3) \text{ est libre}}$. Comme en outre son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. Dans le cas général * : on peut commencer par observer que pour tout P dans E, $\Phi(P)$ est une combinaison linéaire des polynômes R_k (qui sont clairement tous de degré n). Par suite, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. En résumé : $\boxed{\forall\, P\in\ E,\ \Phi(P)\in E}$. Par ailleurs :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(P,Q)\in\ E^2,\ \Phi(\lambda P+\mu Q)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\lambda P+\mu Q]\left(\frac{k}{n}\right)R_k$$

$$=\left(\lambda\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P\left(\frac{k}{n}\right)R_k\right)+\left(\mu\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q\left(\frac{k}{n}\right)R_k\right)=\lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q)$$

Ce qui établit la $\boxed{\text{linéarité de } \Phi}$. Ainsi, Φ est un $\boxed{\text{endomorphisme de } E}$.

3. Par définition de l'application Φ on a :

$$\Phi(1)=R_0+3R_1+3R_2+R_3 \iff \Phi(1)=(1-X)^3+3X(1-X)^2+3X^2(1-X)+X^3 \iff \Phi(1)=[X+(1-X)]^3$$

la dernière égalité provenant de la formule du binôme de Newton †. On en déduit finalement : $\boxed{\Phi(1)=1}$.

D'autre part :

$$\Phi(X)=R_1+2R_2+R_3 \iff \Phi(X)=X(1-X)^2+2X^2(1-X)+X^3$$

$$\iff \Phi(X)=X^3-2X^2+X+2X^2-2X^3+X^3 \iff \boxed{\Phi(X)=X}.$$

4. Il reste à calculer les images par Φ de X^2 et de X^3 pour obtenir la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En premier lieu :

$$\Phi\left(X^2\right)=\frac{1}{3}R_1+\frac{4}{3}R_2+R_3 \iff \Phi\left(X^2\right)=\frac{1}{3}X(1-X)^2+\frac{4}{3}X^2(1-X)+X^3$$

$$\iff \Phi\left(X^2\right)=\frac{X^3-2X^2+X}{3}+\frac{4X^2-4X^3}{3}+X^3 \iff \boxed{\Phi\left(X^2\right)=\frac{1}{3}\,X+\frac{2}{3}\,X^2}.$$

*. Où n est un entier naturel non nul arbitraire.

†. Présentement appliquée dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

En second lieu :

$$\Phi\left(X^3\right)=\frac{1}{9}R_1+\frac{8}{9}R_2+R_3\Longleftrightarrow\Phi\left(X^3\right)=\frac{1}{9}X\left(1-X\right)^2+\frac{8}{9}X^2\left(1-X\right)+X^3$$

$$\Longleftrightarrow\Phi\left(X^3\right)=\frac{X^3-2X^2+X}{9}+\frac{8X^2-8X^3}{9}+X^3\Longleftrightarrow\boxed{\Phi\left(X^3\right)=\frac{1}{9}X+\frac{2}{3}X^2+\frac{2}{9}X^3}.$$

De ces calculs et de la question précédente, on déduit que la matrice de Φ dans la base B_0 est : $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1/3&1/9\\0&0&2/3&2/3\\0&0&0&2/9\end{pmatrix}}$.

5. La matrice A est $\boxed{\text{de rang 4}}$, puisqu'elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, ou encore car son déterminant (égal à $4/27$) est non nul. Par conséquent, elle est inversible, et $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$ ‡.

6. On cherche un polynôme Q_2, unitaire et de degré 2, donc de la forme $Q_2=X^2+aX+b$ (avec a et b réels), tel que $\left(\Phi-\frac{2}{3}\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(Q_2)=0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Cette équation peut se réécrire matriciellement :

$$\left(A-\frac{2}{3}\mathrm{I}_4\right)\begin{pmatrix}b\\a\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1/3&0&0&0\\0&1/3&1/3&1/9\\0&0&0&2/3\\0&0&0&-4/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\a\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}b&=&0\\a&=&-1\end{array}\right.$$

D'où : $\boxed{Q_2=X^2-X}$. On procède de manière analogue pour déterminer Q_3, unitaire et de degré 3, donc de la forme $Q_3=X^3+aX^2+bX+c$ (avec a, b et c réels), tel que $\left(\Phi-\frac{2}{9}\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)(Q_3)=0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Cette équation peut se réécrire matriciellement :

$$\left(A-\frac{2}{9}\mathrm{I}_4\right)\begin{pmatrix}c\\b\\a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}7/9&0&0&0\\0&7/9&1/3&1/9\\0&0&4/9&2/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\b\\a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}c&=&0\\b&=&1/2\\a&=&-3/2\end{array}\right.$$

D'où : $\boxed{Q_3=X^3-\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}X}$.

7. La famille $B_1=(1,X,Q_2,Q_3)$ est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée). Son cardinal étant égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

8. Au vu des questions 3 et 6, la matrice A' de Φ dans la base B_1 est : $\boxed{A'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2/3&0\\0&0&0&2/9\end{pmatrix}}$. §

9. D'après les expressions de Q_2 et Q_3 obtenues dans la question 6, la matrice de passage de la base canonique B_0 à la base B_1 est : $\boxed{K=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&1/2\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}$. Comme toute matrice de passage, K est inversible, et K^{-1} peut être obtenue (par exemple) en résolvant le système linéaire :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&1/2\\0&0&1&-3/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}x=&X\\y-z+(1/2)\,t=&Y\\z-(3/2)\,t=&Z\\t=&T\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}x=&X\\y=&Y+Z+T\\z=&Z+(3/2)\,T\\t=&T\end{array}\right.$$

‡. Et la réciproque Φ^{-1} a pour matrice A^{-1} dans la base B_0.

§. *A posteriori*, on peut observer que le but de la question 6 était de diagonaliser la matrice de Φ, en recherchant des vecteurs propres (Q_2 et Q_3) respectivement pour les valeurs propres $2/3$ et $2/9$.

On en déduit que : $\boxed{K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

10. D'après la formule du changement de base, on a : $A' = K^{-1}AK$, soit : $\boxed{A = KA'K^{-1}}$.

Partie II

11. L'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto (AM - MA) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est clairement linéaire. Comme F est le noyau de φ, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

12. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a : $\boxed{MA = AM} \Longleftrightarrow MKA'K^{-1} = KA'K^{-1}M \Longleftrightarrow K^{-1}MKA'K^{-1} = \underbrace{K^{-1}K}_{I_4}A'K^{-1}M$

$$\Longleftrightarrow K^{-1}MKA'\underbrace{K^{-1}K}_{I_4} = A'K^{-1}MK \Longleftrightarrow K^{-1}MKA' = A'K^{-1}MK \Longleftrightarrow \boxed{NA' = A'N}$$

Conclusion : M commute avec A si et seulement si N commute avec A'.

13. Avec les notations de l'énoncé, on a d'une part :

$$NA' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{NA' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & 2\alpha_{1,3}/3 & 2\alpha_{1,4}/9 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 2\alpha_{2,3}/3 & 2\alpha_{2,4}/9 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 2\alpha_{3,3}/3 & 2\alpha_{3,4}/9 \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2\alpha_{4,3}/3 & 2\alpha_{4,4}/9 \end{pmatrix} \quad (\spadesuit)}$$

et d'autre part :

$$A'N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{A'N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ 2\alpha_{3,1}/3 & 2\alpha_{3,2}/3 & 2\alpha_{3,3}/3 & 2\alpha_{3,4}/3 \\ 2\alpha_{4,1}/9 & 2\alpha_{4,2}/9 & 2\alpha_{4,3}/9 & 2\alpha_{4,4}/9 \end{pmatrix} \quad (\clubsuit)}$$

La matrice N commute avec A' si et seulement si $NA' - A'N = 0$, c'est-à-dire d'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{1,3}/3 & -7\alpha_{1,4}/9 \\ 0 & 0 & -\alpha_{2,3}/3 & -7\alpha_{2,4}/9 \\ \alpha_{3,1}/3 & \alpha_{3,2}/3 & 0 & -4\alpha_{3,4}/9 \\ 7\alpha_{4,1}/9 & 7\alpha_{4,2}/9 & 4\alpha_{4,3}/9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : N commute avec A' si et seulement si $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{3,4}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{4,2}$ et $\alpha_{4,3}$ sont nuls.

14. Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, $N \in F'$ si et seulement s'il existe six scalaires $(\alpha_k)_{k\in[\![1;6]\!]}$ tels que :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow N = \alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33} + \alpha_6 E_{44}\ \P$$

On en déduit que $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$ est une famille génératrice de F' ; et comme c'est une une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, elle est libre.

Conclusion : F' est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 6, une base étant $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$.

¶. En notant E_{ij} la matrice carrée de taille 4 dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui vaut 1.

15. Commençons par observer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la matrice $K^{-1}MK$ est encore dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, ce qui assure que l'image de Ψ est contenue dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

En outre : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (M,M') \in \left[\mathcal{M}_4(\mathbb{R})\right]^2,\ \Psi(\lambda M + \mu M') = K^{-1}(\lambda M + \mu M')K = \left(\lambda K^{-1}M + \mu K^{-1}M'\right)K$

$$= \lambda K^{-1}MK + \mu K^{-1}M'K = \lambda\Psi(M) + \mu\Psi(M')$$

Ce qui prouve la linéarité de Ψ. Donc $\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

Considérons à présent l'application : $\widetilde{\Psi} : M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto KMK^{-1} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et il est clair que $\Psi \circ \widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi} \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$. Ce qui prouve que $\boxed{\Psi \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ (et } \Psi^{-1} = \widetilde{\Psi})}$.

16. Soit $M \in F$, alors $\Psi(M) = K^{-1}MK$ et donc $\Psi(M) \in F'$ d'après la question 12. D'où : $\boxed{\Psi(F) \subset F'}$, c'est toujours ça de pris. Conversely, soit $N \in F'$: alors $N = K^{-1}\left(KNK^{-1}\right)K$, et $\left(KNK^{-1}\right) \in F$, toujours d'après la question 12. En posant $M = KNK^{-1}$, on a donc : $N = \Psi(M)$ avec $M \in F$, d'où $N \in \Psi(F)$. Par suite : $\boxed{F' \subset \Psi(F)}$.

Des deux inclusions établies plus haut, on déduit que : $\boxed{\Psi(F) = F'}$.
De cette égalité et de la question précédente, on déduit que F et $\Psi(F) = F'$ sont des espaces vectoriels isomorphes ; à ce titre, ils sont de même dimension. Ainsi : $\boxed{\dim F = 6}$.

Partie III (*n* désigne un entier naturel non nul quelconque)

17. Soit j un élément de $[\![0; n]\!]$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^{k+j}(1-X)^{n-k-j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^k (1-X)^{(n-j)-k}$$

$$= X^j \underbrace{[X + (1-X)]^{n-j}}_{=1} = \boxed{X^j}$$

18. D'après la question précédente, tous les X^j (pour $j \in [\![0; n]\!]$) appartiennent à $\mathrm{Vect}\,(R_k, k \in [\![0; n]\!])$. On en déduit que la famille $\boxed{(R_k)_{k\in[\![0;n]\!]} \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_n[X]}$. Comme elle est de cardinal $(n+1)$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

19. Il a été prouvé dans la question 2 que Φ est un $\boxed{\text{endomorphisme de } E}$.

20. Soit $P \in E$. On a :

$$\Phi(P) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) R_k = 0 \quad (\diamondsuit)$$

Or d'après la question précédente, la famille $(R_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de E ; c'est donc en particulier une famille libre de E, et l'égalité $(\diamondsuit)$ implique alors :

$$\forall\, k \in [\![0; n]\!],\ \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) = 0 \text{ d'où}^{\|} : \boxed{\forall\, k \in [\![0; n]\!],\ P\left(\frac{k}{n}\right) = 0}.$$

D'après ce qui précède, le polynôme P possède $(n+1)$ racines distinctes (les réels k/n avec $k \in [\![0; n]\!]$). Comme son degré est inférieur ou égal à n, on en déduit que c'est le polynôme nul. En résumé : $\boxed{(\Phi(P) = 0) \Rightarrow (P = 0)}$.

21. D'après la question précédente, Φ est injectif. Comme c'est un endomorphisme de E d'après la question 19, et que E est de dimension finie[**], on en déduit que Φ est bijectif, donc $\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } E}$.

‖. Puisque $\binom{n}{k} \neq 0$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

∗∗. Il s'agissait de ne pas oublier cet argument essentiel pour conclure.