ELBILIA SUP

PREPAS - MPSI

MATHS - MAMOUNI

DS 1

FINAL REVISION

logie - Somme Et Produits

when Holder - Minkowski - Jensen
Cauchy and Schwarz
Meet Together

Rappel : Une fct $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe qd $f'' \geq 0$

ds ce cas

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0,1]$

① Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe

Mq par recurrence sur $n \geq 2$

que $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}$

où $x_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Jensen

Page ①

② Mq $-\ln x : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$
est convexe

③ En déduire que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

où $a, b, p, q \in \mathbb{R}_*^+$

tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

④ En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

où $x_i, y_i, p, q \in \mathbb{R}_+^*$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Minkowski

indication

$$a = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}}$$

⑤ En déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

⑥ Application

on pose $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Moyenne arithmétique

$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$

Moyenne harmonique

⑥ Mq $\frac{1}{H} \leq A$

⑦ Mq

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}$$

Holder

où $x_i, y_i, p, q \in \mathbb{R}_+^*$

tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Indication :

$$(x_i+y_i)^p = (x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1}$$

$$= x_i(x_i+y_i)^{p-1} + y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

⑧ En déduire que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

avec $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

FIN

BONNE CHANCE

Z