Devoir Maison 3

Ensembles & Applications

A la rencontre de Tarski, Cantor et Bernstein

1 Théorème du point fixe de Tarski

Il s'agit dans cette partie de démontrer le résultat suivant :

Théorème (Théorème du point fixe de Tarski) Soit E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E. On suppose que toute partie de E possède une borne supérieure dans E. Alors toute application croissante de E dans E possède un point fixe.

La croissance de f signifie, par analogie avec le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que : $\forall x, y \in E,\quad \Big(x \preccurlyeq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \preccurlyeq f(y)\Big)$.

On fixe un ensemble E, une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E et on suppose que toute partie de E possède une borne supérieure. Soit en outre φ une application croissante de E dans E.

On pose $\mathcal{A} = \Big\{x \in E / \quad x \preccurlyeq \varphi(x)\Big\}$ et on note m la borne supérieure de $\mathcal{A}$, qui existe par hypothèse.

1) Montrer que m est le plus grand élément de $\mathcal{A}$.

2) Montrer que $\varphi(m) \in \mathcal{A}$ et conclure.

2 Une première application simple

1) Montrer que toute application croissante de $[0, 1]$ dans lui-même possède un point fixe et illustrer ce résultat au moyen d'une figure.

2) Le résultat est-il toujours vrai pour les applications croissantes de $[0, 1[$ dans lui-même ?

3 Théorème de Cantor-Bernstein

On souhaite à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème (Théorème de Cantor-Bernstein) Soient E et F deux ensembles. On suppose l'existence d'une injection f de E dans F et d'une injection g de F dans E. Alors il existe une bijection de E sur F.

Ce théorème revêt une grande importance en mathématiques. On l'utilise par exemple pour prouver qu'il y a autant d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{Q}$, aussi saugrenu que cette affirmation puisse paraître.

Intuitivement, l'existence d'une injection de E dans F signifie qu'il y a moins (ou autant) d'éléments dans E que dans F, i.e. qu'en ce sens E est plus petit que F. De même l'existence d'une bijection de E sur F signifie que E et F ont le même nombre d'éléments, i.e. qu'ils ont la même taille. Le théorème de Cantor-Bernstein affirme donc en substance ceci : si E est plus petit que F et si F est plus petit que E, alors E et F ont la même taille. Tout ça pour ça, mais ce n'est pas tout à fait évident.

Soient E et F deux ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans E. La relation d'ordre utilisée ci-après sur $\mathscr{P}(E)$ est la relation d'inclusion.

1) On pose, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $\varphi(A) = E \setminus g\Big(F \setminus f(A)\Big)$.
Montrer que φ est une application croissante de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même.

2) Montrer que toute partie de $\mathscr{P}(E)$ possède une borne supérieure.

Le théorème du point fixe de Tarski nous permet alors d'introduire un point fixe M de φ.

3) Montrer que $g\Big(F \setminus f(M)\Big) = E \setminus M$.

4) Pourquoi f réalise-t-elle une bijection de M sur $f(M)$? Pourquoi g réalise-t-elle une bijection de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$?

5) Représenter sur une figure avec des patates les personnages de la question précédente et en déduire la construction propre d'une bijection de E sur F.

Fin