Devoir Maison 3
Ensembles & Applications
Corrigé

A la rencontre de Tarski, Cantor et Bernstein (correction)

1 Théorème du point fixe de Tarski

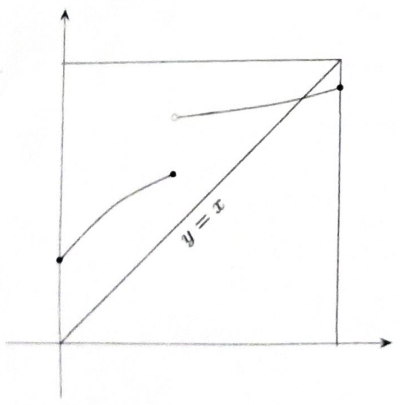
1) Pour commencer il est bien clair que m majore $\mathcal{A}$ par définition. Il nous reste à prouver que $m \in \mathcal{A}$.
Remarquons pour commencer que $x \preccurlyeq \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Mais par ailleurs $x \preccurlyeq m$. Par croissance de φ on obtient donc $\varphi(x) \preccurlyeq \varphi(m)$. Finalement, par transitivité, $x \preccurlyeq \varphi(m)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, ce qui signifie en d'autres termes que $\varphi(m)$ majore $\mathcal{A}$.
Comme m est par définition le plus petit majorant de $\mathcal{A}$, ce dernier résultat indique que $m \preccurlyeq \varphi(m)$, i.e. que $m \in \mathcal{A}$.

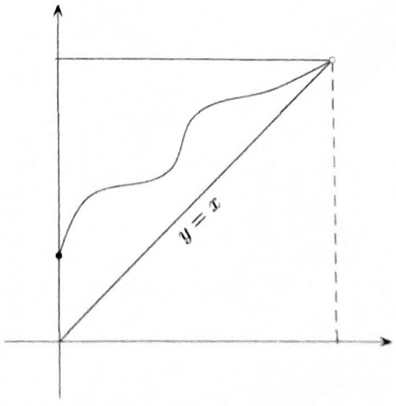
2) Comme $m \in \mathcal{A}$, alors $m \preccurlyeq \varphi(m)$. Mais φ est croissante donc $\varphi(m) \preccurlyeq \varphi(\varphi(m))$. Ceci prouve que $\varphi(m) \in \mathcal{A}$. Or m est le plus grand élément de $\mathcal{A}$, donc en fait $\varphi(m) \preccurlyeq m$. A partir de la double inégalité $m \preccurlyeq \varphi(m) \preccurlyeq m$, nous pouvons conclure que $\varphi(m) = m$ par transitivité. Comme voulu φ possède un point fixe.

2 Une première application simple

1) Il nous suffit de prouver que toute partie de $[0,1]$ possède une borne supérieure pour la relation d'ordre naturelle $\leqslant$. Or cela découle tout simplement de la propriété de la borne supérieure car toute partie de $[0,1]$ est bien sûr majorée (par 1), mais le cas de l'ensemble vide doit être étudié à part. L'ensemble des majorants de l'ensemble vide dans $[0,1]$ est l'ensemble $[0,1]$ lui-même, qui admet 0 comme plus petit élément ; bref, 0 est le plus petit des majorants de l'ensemble vide donc l'ensemble vide admet 0 pour borne supérieure.
La figure de gauche ci-dessous illustre le résultat de cette question : de quelque point qu'on parte en 0 et vers quelque point qu'on aille en 1 en croissant toujours à l'intérieur du carré $[0,1] \times [0,1]$, on sent bien intuitivement qu'on est obligé à un moment de traverser la droite d'équation $y = x$.

2) Le résultat de la question **1)** n'est pas conservé pour les applications croissantes de $[0,1[$ dans lui-même. La figure de droite ci-dessous illustre cela par un contre-exemple.





Concrètement, on peut choisir comme fonction contre-exemple la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2}$ sur $[0,1[$, à valeurs dans $[0,1[$ et sans point fixe !

3 Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein

1) Pour commencer φ est bien à valeurs dans $\mathscr{P}(E)$ comme sa définition l'indique. Montrons qu'elle est croissante. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Faisons l'hypothèse que $A \subseteq B$. Alors $f(A) \subseteq f(B)$ car toute image d'un élément de A par f est bien sûr image d'un élément de B par f, B contenant A. Ensuite $F \setminus f(B) \subseteq F \setminus f(A)$ car un élément de F qui n'est pas dans $f(B)$ ne peut pas se trouver dans $f(A)$, $f(A)$ étant inclus dans $f(B)$. On continue de même : $g\Big(F \setminus f(B)\Big) \subseteq g\Big(F \setminus f(A)\Big)$ et enfin $E \setminus g\Big(F \setminus f(A)\Big) \subseteq E \setminus g\Big(F \setminus f(B)\Big)$, i.e. $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

2) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$.

Si $\mathcal{A}$ est vide, alors $\varnothing$ majore $\mathcal{A}$ puisque : $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \Big(\overbrace{A \in \mathcal{A}}^{\text{Faux !}} \implies A \subseteq \varnothing\Big)$. Et bien sûr $\varnothing$ est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$, donc $\sup \mathcal{A} = \varnothing$.

Supposons à présent $\mathcal{A}$ non vide et notons M la réunion de tous les éléments de $\mathcal{A}$, $M = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, et montrons que M est la borne supérieure de $\mathcal{A}$.

- Pour commencer M est bien un majorant de $\mathcal{A}$ car évidemment, par construction, M contient toutes les parties de E éléments de $\mathcal{A}$.
- Montrons alors que M est plus petit que tout majorant de $\mathcal{A}$. Soit N un majorant de $\mathcal{A}$. Alors N contient toutes les parties de E éléments de $\mathcal{A}$, donc également leur réunion M. Bref, $M \subseteq N$ comme voulu.

3) Dire que M est un point fixe de φ revient à dire que $E \setminus g\Big(F \setminus f(M)\Big) = M$, i.e. que M est le complémentaire de $g\Big(F \setminus f(M)\Big)$ dans E. A fortiori $g\Big(F \setminus f(M)\Big)$ est lui-même le complémentaire de M dans E : $\quad g\Big(F \setminus f(M)\Big) = E \setminus M$.

4) Par restriction, f est injective sur M. Mais par ailleurs f est surjective de M sur son image $f(M)$. Tout ceci fait qu'au final f est bijective de M sur $f(M)$.

De même g est injective sur $F \setminus f(M)$ par restriction et surjective de cet ensemble sur son image $g\Big(F \setminus f(M)\Big)$. Or $g\Big(F \setminus f(M)\Big) = E \setminus M$ via **2)** donc g est bijective de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$.

5) La figure ci-dessous indique que f met en relation bijectivement les éléments de M et de $f(M)$, et que g fait la même chose avec les éléments de $F \setminus f(M)$ et $E \setminus M$. Notons $\hat{g}$ l'application restreinte $g_{|F \setminus f(M)}$. Nous avons vu que $\hat{g}$ est bijective de $F \setminus f(M)$ sur $E \setminus M$; l'application $\hat{g}^{-1}$ est donc correctement définie. Posons alors, pour tout $x \in E$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \ ; \\ \hat{g}^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus M. \end{cases}$$

Vérifions brièvement que h est une bijection de E sur F.

- **Surjectivité :** Tout élément de $f(M)$ possède un antécédent par f dans M, donc un antécédent par h ; de même, tout élément de $F \setminus f(M)$ possède un antécédent par h dans $E \setminus M$, à savoir son image par g. Ainsi tout élément de F possède un antécédent par h dans E.
- **Injectivité :** Soient $x, x' \in E$. On suppose que $h(x) = h(x')$. Si x et x' sont dans M alors en fait $f(x) = f(x')$; l'injectivité de f montre dans ce cas que $x = x'$. Si x et x' sont dans $E \setminus M$, alors $\hat{g}^{-1}(x) = \hat{g}^{-1}(x')$; composant par $\hat{g}$ on obtient ici aussi $x = x'$. Enfin, que se passe-t-il si $x \in M$ et $x' \in E \setminus M$ (idem dans le dernier cas) ? On a $h(x) = f(x) \in f(M)$ alors que $h(x') = \hat{g}^{-1}(x') \in F \setminus f(M)$, de sorte que ce cas ne se produit pas. Finalement nous avons bien montré que $x = x'$ dans tous les cas.