EL BILIA SUP
PREPAS - MPSI
MATHS - MAMOUNI

DM : 4
Nombres Reels

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixe et $A = \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \frac{k(k+1)}{2} \leq n\}$

i) Justifier que $0 \in A$

ii) Verifier que A est majorée par $2n$

iii) En deduire que A admet une borne sup

on pose $s = \sup A$

iv) Justifier que $s = \max A$

v) En deduire que $\frac{s(s+1)}{2} \leq n$

2) i) Justifier que $s+1 \notin A$

ii) En deduire que
$$n < \frac{(s+1)(s+2)}{2}$$

iii) Conclure que
$$\frac{s(s+1)}{2} \leq n < \frac{(s+1)(s+2)}{2}$$

3) On considère l'application

$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(a,b) \longmapsto a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$$

Soit $s \in \mathbb{N}$ fixé

on pose $E_s = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \text{ tq } a+b=s\}$

i) Mq $E_s \cap E_{s'} = \emptyset$

ii) Mq $\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(a,b) \in E_s$ où $s = a+b$

iii) En déduire que $(E_s)_{s\in\mathbb{N}}$ partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

iv) Mq $f_{|E_s}$ est injective $\forall s \in \mathbb{N}$

v) En déduire que f injective

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

i) Mq l'eq d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + x - 2n = 0$$

admet une unique solution réelle positive $x > 0$

ii) On pose $s = E[x]$

Mq $\frac{s(s+1)}{2} \leq n < \frac{(s+1)(s+2)}{2}$

iii) on pose $a = n - \frac{s(s+1)}{2}$

$b = s - a$

Vérifier que $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

$f(a,b) = n$

iv) Conclure que f est surjective

4) sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on definit la relation suivante

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow f(a,b) \leq f(c,d)$

i) Mq il s'agit d'une relation d'ordre

ii) Mq cet ordre est total

iii) Justifier que le 1er elt de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour cette relation d'ordre est $(a,b) \in \mathbb{N}$ tq $f(a,b) = 0$

Donner cet elt

iv) En deduire les cinq premiers elt de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour cette relation d'ordre

v) Representer graphiquement cette relation d'ordre en reliant les elts de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en respectant l'ordre

$1^{er} \to 2^{e} \to 3^{e} \to \ldots$

5) Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on definit la relation

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow f(a,b) = f(c,d)$

i) Mq c'est une relation d'equivalence

ii) Donner la classe d'equivalence $\overline{(a,b)}$ pour chaque $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

FIN