Devoir Maison N°6

Suites Numériques

Dans ce problème, on s'intéresse essentiellement à la *dynamique* des fonctions $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + c$, suivant la valeur du réel c.

Cela signifie que pour chaque valeur de $x_0 \in \mathbb{R}$, on va étudier le comportement de la suite (x_n) de premier terme ce x_0 et vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2 + c$.

Le comportement de la suite (x_n), qui est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, va donc dépendre bien sûr du choix de x_0 (appelé *germe de la suite*) et de la valeur de c.

1) **Cas où $c = 0$, $f_c = f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.** On suppose $c = 0$.
   a) Ecrire explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n en fonction de x_0.
   b) Préciser alors la limite de la suite (x_n) suivant la valeur de x_0.
2) **Détermination des points fixes de f_c :**
   Un réel $x \in \mathbb{R}$ est appelé un *point fixe* de f_c si, et seulement si, $f_c(x) = x$.
   Montrer que, suivant la valeur de c, la fonction f_c admet $2, 1$ ou 0 points fixes, qu'on explicitera et qu'on notera (s'ils existent) : $\alpha_c \leq \beta_c$.
3) **Etude du cas $c > 1/4$:**
   On suppose $c > 1/4$. Montrer que pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) est croissante, puis que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4) **Etude partielle du cas $c \leq 1/4$:** on suppose $c \leq 1/4$ et on note $\alpha_c \leq \beta_c$ les deux points fixes de f_c trouvés ci-dessus (confondus si $c = 1/4$).
   a) Montrer que si $x_0 > \beta_c$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   b) Etudier ensuite le cas $x_0 < -\beta_c$.
5) **Etude du cas critique $c = 1/4$, vitesses de convergence/divergence :**
   On suppose donc $c = 1/4$.
   a) Montrer que (x_n) converge si, et seulement si, $x_0 \in [-1/2, 1/2]$
   b) Pour étudier la vitesse de convergence/divergence, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - 1/2$.
      Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
   c) **Vitesse de convergence :**
      On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. On sait donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
      (i) Montrer que $(v_n) = \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers une limite finie non nulle que l'on précisera.
      (ii) Démontrer le théorème de Cesaro suivant : si $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et si on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{v_1 + \cdots + v_n}{n}$ alors $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
      (iii) En déduire un équivalent simple de (u_n) pour $n \to +\infty$.
   d) **Vitesse de divergence dans le cas $u_0 \notin [-1, 0]$:**
      On suppose que $u_0 \notin [-1, 0]$. On sait donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
      On note $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{2^n} \ln(u_n)$ (cette suite est bien définie car $\forall\, n \geq 1$, $u_n > 0$.)
      (i) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$.
      (ii) En déduire que la suite (w_n) converge. On note ℓ sa limite dans la suite.
      (iii) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $w_{n+p+1} - w_n \leq \dfrac{1}{2^n} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$.

(iv) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n(\ell - w_n) = 0$ puis qu'il existe un réel $c > 1$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c^{2^n}$.

6) **Propriétés générales des points fixes attractifs :**
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction quelconque. Un point fixe x de g est dit *attractif* si, et seulement si, $|g'(x)| < 1$.
Pour chaque valeur de $x_0 \in \mathbb{R}$, on note encore (x_n) la suite récurrente définie par cette valeur de x_0 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer que si un point fixe ℓ de g est attractif, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, la suite récurrente (x_n) définie par ce x_0 converge vers ℓ.

b) Si ℓ est un point fixe attractif de g, on appelle *bassin d'attraction* de ℓ l'ensemble $\mathcal{B}_\ell$ formé par toutes les valeurs de x_0 pour lesquelles la suite (x_n) converge vers ℓ.
$$\mathcal{B}_\ell = \{x_0 \in \mathbb{R} |\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\}$$
On appelle I_ℓ la réunion de tous les intervalles contenant ℓ inclus dans $\mathcal{B}_\ell$.
On *admet* que I_ℓ est un intervalle ouvert non vide $]a,b[$ avec $a < b$ (cela se déduit du a)).
Montrer les inclusions $g(]a,b[) \subset]a,b[$ et $g(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$.

c) On suppose en outre que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

(i) Montrer que la dérivée de $h = g\circ g$ ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

(ii) En déduire qu'il existe un $a' \in]a,\ell[$ et un $b' \in]\ell,b[$ tels que :
$$h'(a') = 1 \quad \text{et} \quad h'(b') = 1$$

7) **Généralisations : points périodiques attractifs**
On note $f^{\circ n}$ l'itérée n-fois de f définie comme suit :
$$f^{\circ 0} = \mathrm{id} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{\circ(n+1)} = f\circ f^{\circ n}.$$
On dira qu'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est *point périodique* de f s'il existe un entier $q > 0$ tel que $f^{\circ q}(x_0) = x_0$. On appellera *période* de x_0 le plus petit entier $q > 0$ vérifiant cette propriété et orbite de x_0 l'ensemble $\mathcal{O}(x_0, f) = \{f^{\circ k}(x_0),\ \text{pour } k = 0, 1, \ldots, q-1\}$.
Pour un point x_0 périodique de période q, on dira qu'il est *attractif* ssi $|(f^{\circ q})'(x_0)| < 1$.

a) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (f^{\circ n})'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^{\circ i}(x)).$$

b) **Remarque : (pas de question)** avec la propriété précédente, on peut en déduire (non demandé) que si x_0 est périodique de période q et attractif alors pour tout $x \in \mathcal{O}(x_0, f)$, le point x est aussi périodique de période q et attractif avec $|(f^{\circ q})'(x)| = |(f^{\circ q})'(x_0)|$.

8) **Retour aux fonctions $f_c : x \mapsto x^2 + c$.**

a) Déterminer une C.N.S. sur c pour que le point fixe α_c soit attractif.

b) On admet ici que les considérations de la question 6 appliquées à $g = f_c^{\circ q}$ permettent [1] de montrer le :
Théorème admis si f_c admet un point périodique attractif de période q, qu'on note x_0, alors la suite $(f_c^{\circ qn}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x de l'orbite de x_0.
Question : Déduire de ce théorème que si $c < -2$, f_c n'a pas de point périodique attractif.
Indication – On pourra comparer $f_c(0)$ et $-\beta_c$.

Epilogue : pour $c \in [-2, 1/4]$ la situation est très riche mais le théorème ci-dessus permet de montrer qu'il n'y a à chaque fois qu'au plus *une* orbite périodique attractive, qu'on détecte avec le germe 0.

1. avec d'autres ingrédients qui demanderaient un sujet de 4h

Fin

CORRIGE

1) **Cas où $c=0$, $f_c=f_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$.**

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $H(n)\ :\ x_n = x_0^{2^n}$.
- $H(0)$ dit qu $x_0=x_0$ ce qui est vrai.
- Hypothèse de réc. : supposons $H(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$.

Alors $x_{n+1}=x_n^2=(x_0^{2^n})^2=x_0^{2^n\times 2}=x_0^{2^{n+1}}$ ce qui montre que $H(n+1)$ est vraie.
La récurrence est établie : $H(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Le a) donne aussi que $|x_n|=|x_0|^{2^n}$. Remarquons aussi que $x_1=x_0^2\geq 0$ donc pour tout $n\geq 1$, $x_n\geq 0$. Donc pour tout $n\geq 1$, $x_n=|x_0|^{2^n}$.
- Si $|x_0|<1$ alors $|x_0|^{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- Si $|x_0|=1$ alors $x_n=1$ pour tout $n\geq 1$.
- Si $|x_0|>1$ alors $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

2) **Détermination des points fixes de f_c :**

On considère $\varphi_c\ :\ x\mapsto f_c(x)-x=x^2-x+c$.
L'ensemble des points fixes de f_c est l'ensemble des zéros de φ_c. Comme φ_c est polynomiale du second degré, on obtient bien trois cas suivant le discriminant de φ_c, qui vaut $\Delta=1-4c$.
- 1er cas : $\Delta>0$ i.e. $c<1/4$, f_c admet deux points fixes distincts $\alpha_c=\dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ et $\beta_c=\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$.
- 2ème cas : $\Delta=0$ i.e. $c=1/4$, f_c admet un unique point fixe $\alpha_c=\beta_c=\frac{1}{2}$.
- 3ème cas : $\Delta<0$ i.e. $c>1/4$. Dans ce cas f_c n'admet aucun point fixe.

3) **Etude du cas $c>1/4$:**

Avec la fonction $\varphi_c\ :\ x\mapsto f_c(x)-x=x^2-x+c$ introduite à la question précédente, on sait ici que φ_c a un discriminant négatif donc $\varphi_c>0$ sur $\mathbb{R}$.
Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=\varphi_c(x_n)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n>0$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

Par théorème de la limite monotone, ou bien (x_n) converge ou bien $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
Or *par l'absurde* si (x_n) converge vers un $\ell\in\mathbb{R}$, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f_c(x_n)$, on aurait, par continuité de f_c et passage à la limite, $\ell=f_c(\ell)$. Donc la limite ℓ de (x_n) serait un point fixe de f_c. Mais ici, on est dans le cas où f_c n'a pas de point fixe d'où la *contradiction*.
On conclut donc bien que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

4) **Etude partielle du cas $c\leq 1/4$:**

a) La fonction φ_c est strictement positive sur $]\beta_c,+\infty[$ (polynôme du second degré).
Donc si $x\in]\beta_c,+\infty[$, $\varphi(x)>0$ donne $f(x)>x$ donc $f(x)\in]\beta_c,+\infty[$.
Ainsi l'intervalle $]\beta_c,+\infty[$ est stable par f, donc pour $x_0\in]\beta_c,+\infty[$, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in]\beta_c,+\infty[$. Et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_c(x_n)>0$ donne $x_{n+1}>x_n$.
Ainsi on vient de montrer que si $x_0\in]\beta_c,+\infty[$, la suite (x_n) correspondante était strictement croissante. De même qu'au 3) si, *par l'absurde*, (x_n) convergeait vers une limite ℓ alors ℓ serait un point fixe de f_c et on aurait aussi $\ell>x_0>\beta_c$. Or f_c n'a pas de point fixe dans $]\beta_c,+\infty[$, d'où la *contradiction*.
On conclut donc, par théorème de la limite monotone, que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

b) Dans le cas $x_0<-\beta_c$, comme f_c est *paire*, on sait que $x_1=f_c(-x_0)$ avec $-x_0\in]\beta_c,+\infty[$. La limite de (x_n) est donc la même que celle de la suite de germe $-x_0$ et par le a), on conclut donc que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

5) **Etude du cas critique $c=1/4$ avec vitesses de convergence/divergence.**

a) On sait que $\forall\, x\in\mathbb{R},\varphi_c(x)=x^2-x+1/4\geq 0$, donc la suite (x_n) est toujours croissante.
La fonction $f_c\ :\ x\mapsto x^2+1/4$ étant paire, il suffit d'étudier le comportement de la suite (x_n) pour les germes $x_0\in\mathbb{R}^+$.
Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f_c est croissante, donc les deux intervalles $[0,1/2]$ et $[1/2,+\infty[$, délimités par le point fixe $1/2$ de f_c, sont stables par f.
- Si $x_0\in[0,1/2]$, la suite (x_n) est croissante majorée par $1/2$ donc convergente. Par continuité de f_c elle ne peut converger que vers un point fixe de f_c, donc vers $1/2$ (unique point fixe de f).

• Si $x_0 \in]1/2, +\infty[$, la suite (x_n) est croissante et reste dans l'intervalle $[x_0, +\infty[$, qui ne contient pas de point fixe de f_c. Donc (x_n) diverge, et par théorème de la limite monotone, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par parité de f, on conclut bien que (x_n) converge (vers $1/2$) ssi $x_0 \in [-1/2, 1/2]$ et que (x_n) tend vers $+\infty$ sinon.

b) Par déf. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = x_{n+1} - 1/2 = x_n^2 + 1/4 - 1/2 = x_n^2 - 1/4 = (u_n + 1/2)^2 - 1/4 = u_n^2 + u_n$.

c) **Vitesse de convergence, dans le cas $u_0 \in]-1, 0[$.**

(i) Par déf. $v_n = \dfrac{1}{u_n + u_n^2} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} \cdot \dfrac{1}{1 + u_n} - \dfrac{1}{u_n}$.

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que $\dfrac{1}{1 + u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$.

Donc $v_n = \dfrac{1}{u_n}(1 - u_n + o(u_n) - 1) = -1 + o(1)$ donc $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1}$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $|v_k - l| < \varepsilon' = \varepsilon/2 \quad (*)$. On fixe donc cet entier n_0 et dans ce qui suit, on considère $n \geq n_0$.

On réduit au même dénominateur : $|M_n - l| = |\dfrac{(v_1 - l) + \cdots + (v_n - l)}{n}| \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{n} |v_k - l|}{n}$. On a :

$$|M_n - l| \leq A_n + B_n \quad (0)$$

où $A_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0} |v_k - l|}{n}$ et $B_n = \dfrac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |v_k - l|}{n}$.

• D'une part, par $(*)$ appliqué à tous les $k \in [\![n_0 + 1, n]\!]$, on a $B_n \leq \dfrac{\sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon'}{n} = \dfrac{(n - n_0)\varepsilon'}{n} \leq \varepsilon' = \varepsilon/2$.

Donc $\forall\, n \geq n_0$, $B_n \leq \varepsilon/2 \quad (1)$.

• D'autre part, comme n_0 est fixé, le numérateur de A_n est une constante C indépendante de n. Donc $A_n = C/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe un $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $A_n \leq \varepsilon/2 \quad (2)$.

Conclusion : Par $(0), (1), (2)$, pour tout $n \geq n_1$, on a $|M_n - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Donc on a vérifié la déf. de la limite : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. $\square$

(iii) En appliquant le théorème de Cesaro du (ii) à la suite (v_n) du (i) on a : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ où $M_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} \right) = \dfrac{1}{n u_{n+1}} - \dfrac{1}{n u_1}$ (somme télescopique).

Comme $\dfrac{1}{n u_1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit par somme de limites que $\dfrac{1}{n u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$ et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}}$.

d) **Vitesse de divergence dans le cas $u_0 \notin [-1, 0]$.**

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul suivant donne l'expression demandée :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n), \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n^2 + u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n^2(1 + \frac{1}{u_n})) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n}). \quad (*) \end{aligned}$$

(ii) D'après le lien suite/série, pour montrer que (w_n) converge, il est équivalent de montrer que la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge.

Or comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on sait que $\ln(1 + \dfrac{1}{u_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $(*)$ montre que $w_{n+1} - w_n = o(\dfrac{1}{2^n})$.

Par théorème de comparaisons pour les S.T.P., on en déduit que la série $\sum|w_{n+1}-w_n|$ converge et donc $\sum(w_{n+1}-w_n)$ est absolument convergente donc convergente, ce qui finalement montre bien la convergence de (w_n).

(iii) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$. Soit $k\in[\![0,p]\!]$.

D'après le (i), on sait que $w_{n+k+1}-w_{n+k}\leq\dfrac{1}{2^{n+k+1}}\ln(1+\dfrac{1}{u_{n+k}})$.

Comme la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante et strictement positive , on sait que

$$\ln(1+\frac{1}{u_{n+k}})\leq\ln(1+\frac{1}{u_n}),$$

donc :

$$w_{n+k+1}-w_{n+k}\leq\frac{1}{2^{n+k+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n}).$$

En sommant toutes ces inégalités pour $k\in[\![0,p]\!]$, par télescopage dans le membre de gauche :

$$w_{n+p+1}-w_n\leq\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{n+k+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n}).$$

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{n+k+1}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+p+2}}}{1-\frac{1}{2}}\leq\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$.

Avec les deux inégalités précédentes, on obtient bien : $w_{n+p+1}-w_n\leq\dfrac{1}{2^n}\ln(1+\dfrac{1}{u_n})$.

(iv) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente : $0\leq2^n(w_{n+p+1}-w_n)\leq\ln(1+\frac{1}{u_n})$.

En passant à la limite pour n fixé et $p\to+\infty$, on obtient : $0\leq2^n(\ell-w_n)\leq\ln(1+\frac{1}{u_n})$.

Enfin, comme $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on sait que $\ln(1+\frac{1}{u_n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc par théorème des gendarmes, on obtient bien : $2^n(\ell-w_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Autrement dit $2^n\ell-\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ou encore $\ln(u_n)=2^n\ell+\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Ainsi $u_n=\exp(2^n\ell)\exp(\varepsilon_n)$. Comme $\exp(\varepsilon_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, on conclut bien que :

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\exp(2^n\ell)=c^{2^n},$$

en notant $c=\exp(\ell)$. Comme $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on sait que $c>1$.

6) **Propriétés générales des points fixes attractifs :**

a) Comme $|g'(\ell)|<1$, si on fixe un $\lambda\in]|g'(\ell)|,1[$, alors par continuité de g', il existe un $\varepsilon>0$ tel que si $x\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, $|g'(x)|\leq\lambda$. Par inégalité des accroissements finis, on en déduit que g est λ-lipschitzienne sur $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$.

En particulier $\forall\,x\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, $|g(x)-g(\ell)|\leq\lambda|x-\ell|$ autrement dit $|g(x)-\ell|\leq\lambda|x-\ell|$

Comme $\lambda<1$ ceci montre en particulier que $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ est stable par g.

Donc si $x_0\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, alors par récurrence immédiate $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $|x_n-\ell|\leq\lambda^n|x_0-\ell|$ et donc $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$.

Remarque : *En fait le caractère $\mathcal{C}^1$ n'est pas nécessaire ici, et la dérivabilité de g en ℓ suffit. En effet, par déf.* $g'(\ell)=\lim_{x\to\ell}\dfrac{g(x)-g(\ell)}{x-\ell}$.

Si donc $|g'(\ell)|<1$, la fonction $\tau\,:\,x\mapsto\left|\dfrac{g(x)-g(\ell)}{x-\ell}\right|$ tend en ℓ vers une limite strictement plus petite que 1. Donc si on fixe un $\lambda\in]|g'(\ell)|,1[$, alors par déf. de la limite, il existe un $\varepsilon>0$ tel que si $x\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\setminus\{\ell\}$ alors $|\tau(x)|\leq\lambda$. Donc $\forall\,x\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, $|g(x)-g(\ell)|\leq\lambda|x-\ell|$ autrement dit $|g(x)-\ell|\leq\lambda|x-\ell|$. Et on conclut de même.

b) **Justification de l'affirmation admise :** On remarque d'abord que I_ℓ est une réunion d'intervalles ayant tous le point x_0 en commun, donc c'est un intervalle. On sait bien sûr qu'il n'est pas vide car il contient ℓ.

Reste à montrer que I_ℓ est ouvert. *Par l'absurde* si par exemple $I_\ell=[a,b[$ (le raisonnement serait le même pour la borne b).

Alors il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que $g^{\circ N}(a)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ (avec les notations du a)

Comme $g^{\circ N}$ est continue il existe alors un voisinage $V=]a-\alpha,a+\alpha[$ de a telle que pour tout $x\in V$, $g^{\circ N}(x)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$.

Mais alors par déf. I_ℓ contient aussi $]a-\alpha,b[$ *contradiction.*

La question proprement dite :

Soit $x\in g(]a,b[)$. On a donc un $x_0\in]a,b[$ tel que $g(x_0)=x$. Mais alors la suite des $g^{\circ n}(x)$ est la suite des $g^{\circ(n+1)}(x_0)$ et par déf. de $]a,b[$ elle converge vers ℓ.

Donc $x\in\mathcal{B}_\ell$ et d'autre part $g(]a,b[)$ est un intervalle comme image continue d'un intervalle, qui contient $\ell=g(\ell)$ donc $\boxed{g(]a,b[)\subset I_\ell=]a,b[}$.

Par continuité de g, on sait que $g(a)=\lim_{x\to a,x>a}g(x)$ et comme on vient de montrer que $g(]a,b[)\subset]a,b[$, on en déduit que $g(a)\in[a,b]$. De même pour $g(b)$.

Ainsi on sait que $\{g(a),g(b)\}\subset[a,b]$

Par l'absurde si $g(a)\in]a,b[$. Alors $g(a)\in\mathcal{B}_\ell$, mais alors la suite de premier terme a converge vers ℓ i.e. $a\in\mathcal{B}_\ell$ et $[a,b[\subset I_\ell$ *contradiction.* De même avec b.

On a donc bien montré que $\boxed{\{g(a),g(b)\}\subset\{a,b\}}$

c) On suppose en outre que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

(i) La dérivée de h sur $]a,b[$ est donnée par

$$\forall x\in]a,b[,\ h'(x)=g'(g(x))g'(x).$$

Puisque $g(]a,b[)\subset]a,b[$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, on en déduit que h' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

Comme la fonction continue g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, elle est de signe constant sur cet intervalle, et on déduit de la formule précédente que h' est strictement positive sur l'intervalle $]a,b[$. Par conséquent h est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$. D'après la question précédente, on doit avoir $h(\{a,b\})\subset\{a,b\}$: puisque h est strictement croissante, on a nécessairement $h(a)=a$ et $h(b)=b$.

(ii) L'application $x\mapsto h(x)-x$ est dérivable sur $[a,\ell]$ et s'annule en a et ℓ, donc d'après le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en au moins un point $a'\in]a,\ell[$, pour lequel on a donc $h'(a')=1$. De même pour b'.

7) **Généralisations : points périodiques attractifs**

a) On sait par théorème du cours que $f^{\circ n}$ est dérivable pour tout $n\in\mathbb{N}$ (même si la récurrence qu'on va faire permettrait aussi de le rejustifier).

On note $H(n)\ :\ \forall x\ \in\mathbb{R},\quad (f^{\circ n})'(x)=\prod_{i=0}^{n-1}f'(f^{\circ i}(x))$.

• Initialisation : $H(1)$ dit que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f'(x)$ ce qui est vrai.

• H.R. supposons $H(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}^*$.

On sait alors que

$$\begin{aligned}(f^{\circ(n+1)})'(x) &= (f\circ f^{\circ n})'(x)=f'(f^{\circ n}(x)).(f^{\circ n})'(x),\text{par la dérivée d'une composée}\\ &= f'(f^{\circ n}(x))\prod_{i=0}^{n-1}f'(f^{\circ i}(x))\quad\text{par l'H.R.}\\ &= \prod_{i=0}^{n}f'(f^{\circ i}(x)),\end{aligned}$$

ce qui montre que $H(n+1)$ est vraie.

La récurrence est établie, $H(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

8) **Retour aux fonctions $f_c\ :\ x\mapsto x^2+c$.**

a) On se place bien sûr dans le cas où $c\le 1/4$ pour avoir l'existence de points fixes. Ici $f_c'(x)=2x$ pour tout x. Donc : $f_c'(\beta_c)=1+\sqrt{1-4c}\ge 1$ et $f_c'(\alpha_c)=1-\sqrt{1-4c}$.

Ainsi β_c n'est jamais attractif. En revanche, α_c est attractif ssi $1>1-\sqrt{1-4c}>-1$ Cette condition équivaut à $2>\sqrt{1-4c}>0$ ou encore $4>1-4c>0$ ou encore $1/4>c>-3/4$.

Conclusion : Donc f_c admet un point fixe attractif ssi $c\in]-3/4,1/4[$.

b) Montrons que si $c<-2$ alors $f_c(0)=c<-\beta_c\quad(1)$

En effet, pour $c=-2$, $-\beta_c=-\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}=-2$ et la fonction $c\mapsto-\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ est strictement croissante sur $]-\infty,1/4]$, ce qui prouve (1).

Avec (1), on en déduit que si $x_0=0$, $x_1<-\beta_c$, et donc avec la question 4) b) : $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Mais ceci montre que la suite $(f_c^{\circ n}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de suite extraite convergente donc par le théorème admis f_c n'a pas de point périodique attractif.