ELBILIA - SUP

PREPAS - MPSI

MATHS - MAMOUNI

DS 1

Logique - Sommes Et Produits

Durée : 2h

Exo 1

1) Mq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Mq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Justifier que

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$$

4) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5) On pose $\displaystyle S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k^p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

i) Mq $\displaystyle (p+1) S_{n,p} = -\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_{n,k} + (n+1)^{p+1}$

ii) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \ ?$

Ex 2 /

Soit $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tq

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x, y \in \mathbb{Q}$$

1. Mq $f(0) = 0$
2. Mq $f(nx) = nf(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
3. Mq $f(nx) = nf(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
4. Mq $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{f(1)}{p}$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$
5. En déduire que $f(x) = ax$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ où $a = f(1)$

Ex 3 / Conjecture de Fermat

Soit $a \geq b \geq 0$

1. Rappeler la formule
$$a^n - b^n = (a-b)(\ldots)$$
2. En déduire que
$$a^n - b^n \geq nb^{n-1}(a-b)$$
3. Mq si $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ sol de l'éq $x^n + y^n = z^n$ Alors $x \geq 3$, $y \geq 3$, $z \geq 3$

Ex 4 / When VANDERMONDE Leibniz and PASCAL Meet Together

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

on pose $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$f^{(0)} = f$

1) Mq $\left(x^n\right)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$\forall 0 \leq k \leq n$

2) i) Que vaut $\left(x^n\right)^{(n)}$

ii) Que vaut $\left(x^n\right)^{(k)}$ si $k > n$

3) i) Mq $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

ii) En déduire que

$$\left(\sum_{k=0}^{m} f_k\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} f_k^{(n)}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$

4) On suppose

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

Mq $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $\forall 0 \leq k \leq n$

5) Mq $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$

$\forall 0 \leq k \leq n$

(PASCAL)

6) En déduire que

si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Alors

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Leibniz

7) Application ①

on prend $f(x) = g(x) = (x+1)^n$

i) Justifier que

$$\frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \binom{2n}{n}$$

ii) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

8) Application 2 (BONUS)

on prend $f(x) = (1+x)^n$

$g(x) = (1+x)^m$

i) Justifier que $\frac{(fg)^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n+m}{k}$

ii) En déduire VAN DER MONDE

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} \binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k}$$

9) Application 3

i) Mq $\sum_{p=0}^{k} p \binom{n}{p} \binom{m}{k-p} = n \binom{n+m-1}{k-1}$

ii) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$$

CORRIGE

EX 1

1) par recurrence (voir cours)

2) " (voir cours)

3) il s'agit d'une somme telescopique

$S = \text{dernier} - 1^{er}$

$= (n+1)^4 - 0^4$

4) $(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4$

$= \sum_{k=0}^{n} \cancel{k^4 + 6k^3 + 3k + 1 - k^3}$

$= \sum_{k=0}^{n} k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4$

$= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

$(n+1)^3 = 4S + 6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$S = \frac{1}{4}\left[(n+1)^3 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right]$

$= \dots$

3) i) $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_{n,k}$

$= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} \left(\sum_{i=0}^{n} i^k\right)$

$0 \le k \le p-1$ somme double

$0 \le i \le n$ indice indep

1

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} i^k \right)$$

Newton incomplete
il manque $i=p$
$i=p+1$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} i^k}_{} \right) - \binom{p+1}{p} i^p - \binom{p+1}{p+1} i^{p+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[(i+1)^{p+1} - (p+1) i^p - i^{p+1} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left((i+1)^{p+1} - i^{p+1} \right) - (p+1) \sum_{i=0}^{n} i^p$$

$\Downarrow$ Telescopique

$$= (n+1)^{p+1} - (p+1) S_{n,p}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_{n,k} = (n+1)^{p+1} - (p+1) S_{n,p}$$

CQFD

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = S_{n,4}$ $\quad p=4$

or $\displaystyle 5 S_{n,4} = - \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k} S_{n,k} + (n+1)^5$

$$= -\binom{4}{0} S_{n,0} - \binom{4}{1} S_{n,1} - \binom{4}{2} S_{n,2} - \binom{4}{3} S_{n,3} + (n+1)^5$$

$S_{n,0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$, $S_{n,2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

$S_{n,1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_{n,3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$

Ex 3

① pour $x = y = 0$

on a $f(0) = 2f(0)$

donc $f(0) = 0$

② par recurrence sur n

$$f((n+1)x) = f(nx + x)$$
$$= f(nx) + f(x)$$
$$= nf(x) + f(x)$$
$$= (n+1)f(x)$$

③ pour $x = \frac{1}{p}$

$$f(1) = f\left(p \cdot \frac{1}{p}\right) = p\, f\left(\frac{1}{p}\right)$$

donc $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{f(p)} \cdot f(1)$

⑤ $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q}$

donc $f(x) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = p f\left(\frac{1}{q}\right)$

$$= p \frac{1}{q} f(1)$$
$$= ax$$

Ex 3

1) $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

2) $a \geq b \Rightarrow a^k \geq b^k \Rightarrow a^k b^{n-1-k} \geq b^{n-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} = n\, b^{n-1}$

$\Rightarrow a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \geq n b^{n-1}(a-b)$

3) $x^n = z^n - y^n \geq n y^{n-1}(z-y) \geq n x^{n-1}(z-y)$

③ $\boxed{x \leq y < z}$ $\Rightarrow x \geq n(z-y) \geq 3$

Ex ④

1) par recurrence sur $k \in \mathbb{N}$

pour $k=0$ $(x^n)^{(0)} = x^n = \frac{n!}{(n-0)!} x^{n-0}$

suppos $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

donc $(x^n)^{(k+1)} = \left((x^n)^{(k)}\right)'$

$= \left(\frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}\right)'$

$= \frac{(n-k)\, n!}{(n-k)!} x^{n-k-1}$

$= \frac{n!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1}$ CQFD

2) i) $(x^n)^{(n)} = \frac{n!}{0!} x^0 = n! = cte$

ii) $\forall k > n$ $(x^n)^{(k)} = 0$

car $(x^n)^{(n)} = cte$

3) i) par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$

ii) par recurrence sur $m \in \mathbb{N}$ avec n fixé

4) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

donc $f^{(k)}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^{(k)}$

$= \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i)^{(k)}$ $= 0$ si $k > i$

$= \sum_{i=0}^{k} a_i \frac{i!}{(i-k)!} x^{i-k}$

Ainsi $f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \frac{i!}{(i-k)!} x^{i-k}$

pour $x = 0$ $\quad 0^{i-k} = 0$ si $i<k$

$= 1$ si $i = k$

donc $f^{(k)}(0) = a_k \frac{k!}{0!}$ CQFD

5) Voir demo cours

6) par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$

$n=0$ $\quad (fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$

supposons que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

on derive encore une fois

donc

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}}_{k+1 \to k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{\binom{n+1}{k}} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}$$

CQFD

7)

i) ~~$(fg)^{(n)}(0)$~~

$$(fg)(x) = (x+1)^{2n}$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

avec $a_k = \binom{2n}{k}$

selon qst 4 $a_k = \frac{(fg)^{(k)}(0)}{k!}$

pour $k=n$, on a le resultat

ii) selon Leibniz

$$(fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)$$

or $f(x) = g(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $a_k = \binom{n}{k}$

selon qst 4 $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$

Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!\, a_k\, (n-k)!\, a_{n-k}}{n!}$$

6

Donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cancel{k!}\, \binom{n}{k} \cancel{\binom{n}{n-k}} \cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

8) i) $(fg)(x) = (1+x)^{n+m}$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} a_k x^k$$

où $a_k = \binom{n+m}{k}$

selon qst 4 $\binom{n+m}{k} = a_k = \frac{(fg)^{(k)}(0)}{k!}$

ii) $\binom{n+m}{k} = \frac{1}{k!} (fg)^{(k)}(0)$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)}(0)\, g^{(k-p)}(0)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{b_p}{p!} \frac{c_{k-p}}{(k-p)!} \quad (*)$$

où $f(x) = (1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} b_p x^p$

$$b_p = \binom{n}{p}$$

$g(x) = (1+x)^m = \sum_{p=0}^{m} c_p x^p$

où $c_p = \binom{m}{p}$

puis on remplace dans $(*)$

g) i) $\sum_{p=0}^{k} p\binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$

$= \sum_{p=1}^{k} p\binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$

$= \sum_{p=1}^{k} n\binom{n-1}{p-1}\binom{m}{k-p}$

$p-1 \longrightarrow p$

$= n \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n-1}{p}\binom{m}{k-1-p}$

$= n\binom{n+m-1}{k-1}$

ii) pour $n=m$

$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}^2$

$= \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$

$= n\binom{2n-1}{n-1}$

$= n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\, n!}$

$= \frac{n}{2} \frac{2n \cdot (2n-1)!}{n\,(n-1)!\, n!} = \frac{n}{2} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$= \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$