El BihaSup
PREPAS - MPSI
MATHS - MAMOUNI

Simulation DS 1
Durée 2^h

Logie - Sommes - Produits

Exo 1

(1) Montrer par récurrence ou Newton que $\forall n \geq 3$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

(2) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Ex 2

Mq $\forall n \geq 3,\ \forall m \geq 3$

$$n \leq m \Rightarrow m^n \leq n^m$$

Ex 3

1) Simplifier $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

2) " $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Problème : Inversion de Mobius

Soit x_n et y_n des nombres réels

tq $\boxed{y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

(1) Mq $x_0 = y_0$

(2) Mq $x_1 = y_1 - y_0$

(3) Mq $x_2 = y_2 - 2y_1 + y_0$

(4) Rappeler le principe de changement d'indice dans une somme

5) $$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \binom{n-p}{k}\right) \times \frac{(-1)^p\, n!}{(n-p)!\, p!}$$

6) En deduire que

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^k = -\frac{(-1)^{n-p}\, n!}{(n-p)!\, p!}$$

7) Justifie que

$$x_n = y_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_k$$

8) On suppose dans la suite que

$$x_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} y_p$$

i) Rappeler le principe des sommes doubles à indices dependants

ii) En deduire que

$$x_n = y_n - \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=p}^{n-1} (-1)^{k-p} \binom{n}{k}\binom{k}{p} y_p \right)$$

9) En deduire que

$$\boxed{x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k}$$

BONUS

1) Mq $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall\, 0 \le k \le n$

2) En deduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}$$

3) En deduire que $\binom{2n}{n}$ pair

4) A-t-on $\binom{2n+1}{n}$ impair ?

$\boxed{\text{Ex 4}}$

1) Simplifier $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ $\quad e^{i\theta} \neq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Rappel } 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}}$

2) En deduire $\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = ?$

3) " $\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = ?$

4) " $\sum_{1 \le i, j \le n} \sin (i-j)\theta$

$\boxed{\text{Ex 3}}$

Simplifier $\prod_{k=0}^{n} (-1)^k$

EL Bilia Sup
PREPAS - MPSI
MATHS - MAMOUNI

Simulation DS1
CORRIGE

Ex 1

$\cancel{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \frac{1}{n^k}$

par recurrence

$\underline{n=3}$ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1 + \frac{3\times 1}{3} + \frac{3\times 1}{9} + \frac{1}{27}$

$= 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = 2 + \frac{10}{27} \leq 3$

supposons $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$

donc $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)n = n+1$

② $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$

$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + A$ tq $A \geq 0$

$= 1 + n \times \frac{1}{n} + A = 2 + A \geq 2$

Ex 2 il faut mq $n \leq m \Rightarrow m^n \leq n^m$

Autrement dit $n \leq m \leq n \ln m \leq m \ln n$

" " $n \leq m \leq \frac{\ln m}{m} \leq \frac{\ln n}{n}$

Autrement dit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

est decroissante sur $[3, +\infty[$

ce qui est vrai

car $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0$

~~car~~ $x \geq 3 \Rightarrow x \geq e \simeq 2{,}71 \Rightarrow \ln x \geq 1$

Ex 3

1) On sait que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$

$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$ $k \to k+1$

$= n\,2^{n-1}$

2) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\,n\binom{n-1}{k-1}$

$k=0$ inutile

$= n\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k-1)+1\right]\binom{n-1}{k-1}$

$= n\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(k-1)\binom{n-1}{k-1}}_{\text{on utilise qst ① pour } n-1 \text{ au lieu de } n} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\right]$

$= n\left[(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=-1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\right]$ $k \to k+1$

$k=-1$ impossible

$= n\left[(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}\right]$

$= n\left[(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} - 1\right]$

$k=n-1$

$= n\left[(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} - 1\right]$

Page 2

Ex 4

1) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$

$$= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$= \frac{-2\sin(n+1)\frac{\theta}{2}\, e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{-2\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\theta/2}}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\theta/2}\, e^{in\theta/2}$$

2) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \mathrm{Re}(S_1)$

$$S_2 = \frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}(S_3)$

$$= \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin n\frac{\theta}{2}$$

4) $S = \sum_{1 \le i, j \le n} \sin(i-j)\theta$

$$= \sum \cos i\theta \sin j\theta - \sin i\theta \cos j\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \cos i\theta \sin j\theta\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \cos j\theta \sin i\theta\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \cos i\theta \sin j\theta\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \cos i\theta \sin j\theta\right)$$

indice est muet

$$= 0$$

Ex 5 : $\prod_{k=0}^{n} (-1)^k = (-1)^{\sum_{k=0}^{n} k} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Bonus

① voir demo du cours

② $$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2n-k}$$

on pose $p=2n-k$

$k=0 \Rightarrow p=2n$

$k=n-1 \Rightarrow p=n+1$

$$=\sum_{p=n+1}^{2n}\binom{2n}{p}=\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}$$

③ $$2^{2n}=(1+1)^{2n}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}}_{S}+\binom{2n}{n}+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}}_{S}$$

$$2^{2n}=2S+\binom{2n}{n}$$

donc $\binom{2n}{n}=2^{2n}-2S$ pair

FIN

EL Bilia Sup

PREPAS - MPSI

MATHS - MAMOUNI

Formule d'inversion de Mobius

Enoncé :

Soit $x_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$

tq $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mq $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Par recurrence forte à pas inconnue clé ①

Initialisation

Pour $n=0$ $\quad y_0 = x_0 \Rightarrow x_0 = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} y_0$

HERIDITE

supposons le resultat vrai $\forall k < n$

cad $x_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} y_p$

et Mq $x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$

En effet

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x_k + x_n$$

donc

$$x_n = y_n - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x_k$$

$$= y_n - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}y_p\right)$$

clé ②

$$= y_n - \sum_{0\le p\le k\le n-1}\binom{n}{k}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}y_p$$

clé ③

$$= y_n - \sum_{p=0}^{n-1}\left[\sum_{k=p}^{n-1}\left(\binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^k\right)y_p(-1)^{-p}\right]$$

$$= y_n - \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=p}^{n-1}\left(\frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!}\,\frac{\cancel{k!}}{p!(k-p)!}(-1)^k\right)y_p(-1)^p\right)$$

$$= y_n - \sum_{p=0}^{n-1}\left[\sum_{k=p}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,(k-p)!}\right]\times\frac{y_p(-1)^p}{p!}\cdot n!$$

clé ④ $k \to k+p$ et $k-p \to k$

$$= y_n - \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1-p}\frac{(-1)^{k+\cancel{p}}}{(n-k-p)!\;k!}\right)\frac{y_p(-1)^{\cancel{p}}}{p!}n!$$

$$\boxed{x_n = y_n - \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-p-1}\frac{(-1)^k(n-p)!}{k!(n-p-k)!}\right)y_p\,\frac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (*)$$

(2

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{n-p-1} \frac{(-1)^k (n-p)!}{k!\,(n-p-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \binom{n-p}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} (-1)^k - \underbrace{(-1)^{n-p}\binom{n-p}{n-p}}_{k=n-p}$$

$$= (1+-1)^{n-p} - (-1)^{n-p}$$

$$= -(-1)^{n-p}$$

Donc $(*)$ devient.

$$x_n = y_n + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n-p} y_p \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \underbrace{y_n}_{p=n} + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_p$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

CQFD