Devoir Surveillé N°2

Ensembles-Applications
Nombres Réels

Durée : 4 heures
Jeudi 12 Novembre 2021

Exercice 1

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose

$$d_1(x,y) = |x-y|$$

et

$$d_2(x,y) = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right|$$

1. Prouver que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ d_2(x,y) = 0 \iff x = y$$

2. Justifier que

$$\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3\ \ d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$$

3. Prouver que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$$

4. Existe-t-il un réel λ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ d_1(x,y) \leq \lambda d_2(x,y)$$

Exercice 2

Problème 1

Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E, on considère la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array}\right. \end{array}$$

Cette fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée fonction caractéristique de A. On notera dans la suite du problème $\bar{A} = C_E A$ le complémentaire de A dans E.

1. Tracer la fonction $\mathbb{1}_A$ dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et $A = [-4,-1] \cup [1,5]$.
2. Expliciter les fonctions $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.
3. Démontrer les formules suivantes avec A et B des parties de E :
   (a) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
   (b) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
   (c) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
   (d) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
   (e) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
   (f) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
   (g) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.

   On rappelle que deux fonctions sont égales si et seulement si elles coïncident en tous les éléments de E.
4. On définit la différence symétrique de deux parties A et B de E par : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
   (a) Montrer que : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   (b) Préciser $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$.
   (c) Vérifier que $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Comparer $A\Delta B$ et $\bar{A}\Delta\bar{B}$.
   (d) Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
   (e) Soit A, B, C trois sous-ensembles de E, en utilisant la propriété démontrée à la question précédente et les questions 3.(a) et 3.(c), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

   Montrer que Γ est une bijection.
6. Soit F un deuxième ensemble, B une partie de F et $f : E \to F$ une application. Montrer que :

$$\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f$$

Problème 2

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques bijections mettant en jeu l'ensemble $\mathbb{N}$. La plupart des questions peuvent être traitées séparément.

1. Donner deux bijections de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que l'application f suivante est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}\\ n & \mapsto & \begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair}\\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si} \quad n \text{ est impair}\end{cases}\end{array}$$

3. On considère l'application g suivante :

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}\\ (k,n) & \mapsto & 2^k(2n+1)-1\end{array}$$

   (a) Montrer que tout nombre entier non nul s'écrit sous la forme $2^k(2n+1)$ où n et k sont des entiers naturels.

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, montrer que m admet un antécédent par g.

   (c) Montrer que g est injective.

   (d) En déduire que g est une bijection.

4. Démontrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N}$ où p est un entier non nul. On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'application g définie à la question précédente. On ne cherchera pas à donner une formule explicite pour cette bijection.
5. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. On n'ambitionnera pas de donner une démonstration rigoureuse ou une formule explicite mais une description détaillée suffira.
6. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ une application injective. On suppose de plus que : $\forall n \in \mathbb{N},\ h(n) \leq n$, montrer que h est l'identité.

Problème 1

Partie I

Soit H un sous-groupe, non trivial, de $(\mathbb{R},+)$. On note $H_+ = H \cap \mathbb{R}_+^*$. Pour tout a dans $\mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Justifier l'existence de $\inf H_+$. On note $\alpha = \inf H_+$.
2. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Si $\alpha \notin H_+$, justifier l'existence de $h_1 \in H$ tel que $\alpha < h_1 < 2\alpha$. En déduire que $\alpha \in H_+$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m\alpha \leqslant x < (m+1)\alpha$.
   (c) Démontrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$. Donner un exemple de sous-groupe dense de $(\mathbb{R},+)$.
4. Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{R}$?
5. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ua + vb, (u,v) \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
   (b) Pour $a = 1/3$ et $b = 1/7$, démontrer que $\alpha \geqslant \dfrac{1}{21}$, où $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$, et justifier qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $3u + 7v = 1$. En déduire que $G = \dfrac{1}{21}\mathbb{Z}$.
   (c) Démontrer que G est discret (de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$) si, et seulement si, $\dfrac{a}{b}$ est rationnel.

Partie II

Soient A un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(A)$ est dense dans $\mathrm{Im}\,(f)$.
2. En déduire que l'ensemble $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Partie III

Soit f une fonction périodique et non constante sur $\mathbb{R}$. On note :

$$G = \{T \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble G est l'ensemble des périodes de f. On dit que f possède une période fondamentale lorsque $G \cap \mathbb{R}_+$ possède un minimum.

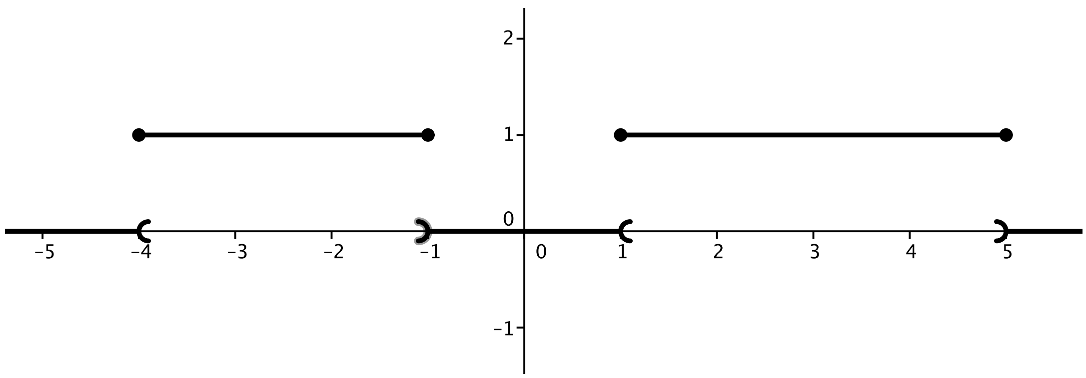
1. Montrer que G est une groupe pour l'addition usuelle.
2. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est constante sur G. En déduire que f possède une période fondamentale.
3. Donner un exemple de fonction périodique sur $\mathbb{R}$ qui ne possède pas de période fondamentale.

Problème 1

1. Par définition, on a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_A & : & \mathbb{R} & \to \{0,1\} \\ & & x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-4,-1] \cup [1,5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

D'où le graphique suivant :



2. Par définition, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_E(x) = 1$, ainsi :

$$\boxed{\mathbb{1}_E \text{ est la fonction constante égale à } 1}$$

D'autre part, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_\emptyset(x) = 0$:

$$\boxed{\mathbb{1}_\emptyset \text{ est la fonction constante égale à } 0}$$

3. (a) Soit $A \subset E$, la fonction $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 ou 1. Ainsi pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x)^2 = \mathbb{1}_A(x)$, ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A}$$

(b) On peut traiter cette questions à l'aide d'un tableau récapitulatif, prenons A et B deux parties de E et x un élément de E :

	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$
cas 1	oui	oui	1	1
cas 2	oui	non	1	0
cas 3	non	oui	0	1
cas 4	non	non	0	0

On a :

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{on se trouve dans les cas 1, 3 ou 4 } \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$$

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B}$$

Il y a bien entendu d'autres façon de rédiger cette question sans l'aide de ce tableau et en traitant les différents cas possibles.

(c) On utilise la question précédente, soient A et B deux parties de E :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

(d) Là aussi un tableau résumant les différents cas fait l'affaire. Soient A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in \bar{A}$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_{\bar{A}}(x)$
oui	non	1	0
non	oui	0	1

Il est clair que : $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

(e) On emploie la même méthode avec A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x)$
oui	oui	oui	1	1	1	1
oui	non	non	1	0	0	0
non	oui	non	0	1	0	0
non	non	non	0	0	0	0

On constate que : $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$, ainsi :

$$\boxed{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}}$$

(f) Voici le tableau correspondant à la situation avec A et B deux parties de E et $x \in E$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$
oui	oui	oui	1	1	$1+1-1=1$	1
oui	non	oui	1	0	$1+0-0=1$	1
non	oui	oui	0	1	$0+1-0=1$	1
non	non	non	0	0	$0+0-0=0$	0

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B}}$$

(g) On a vu dans le cours que pour toutes parties X et Y de E, on a $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Considérons A et B deux parties de E, on a :

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\bar{B}} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$$

Ceci en utilisant les formules démontrées aux questions 3.(d) et 3.(e).

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)}$$

4. (a) On a :

$$\begin{array}{rcll} A\Delta B & = & (A\cup B)\setminus(B\cap A) & \\ & = & (A\cup B)\cap(\overline{B\cap A}) & \\ & = & (A\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{A}) & \\ & = & [A\cap(\bar{B}\cup\bar{A})]\cup[B\cap(\bar{B}\cup\bar{A})] & \text{en distribuant} \\ & = & [(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{A})]\cup[(B\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})] & \text{or } A\cap\bar{A}=\emptyset \text{ et } B\cap\bar{B}=\emptyset \\ & = & (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}) & \\ & = & (A\setminus B)\cup(B\setminus A) & \end{array}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}$$

(b) Soit A une partie de E, en utilisant la définition, on a :

$$A\Delta E=(A\cup E)\setminus(A\cap E)=E\setminus A=\bar{A}$$

et :

$$A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)=A\setminus\emptyset=A$$

$$\boxed{\forall A\in\mathcal{P}(E),\ A\Delta E=\bar{A}\text{ et }A\Delta\emptyset=A}$$

(c) La formule $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$ a été démontrée au cours de la question 4.(a). En utilisant cette égalité, on a pour toutes parties A et$B$ de E :

$$\bar{A}\Delta\bar{B}=(\bar{A}\cap\bar{\bar{B}})\cup(\bar{B}\cap\bar{\bar{A}})=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{B}\cap A)=A\Delta B$$

$$\boxed{\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ \bar{A}\Delta\bar{B}=A\Delta B}$$

(d) On va utiliser les différents résultats de la question 3. :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1}_{A\Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} & \text{définition de la différence symétrique} \\ & = & (\mathbb{1}_{A\cup B})(1-\mathbb{1}_{A\cap B}) & \text{avec 3.(g)} \\ & = & (\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) & \text{en utilisant 3.(e) et 3.(f)} \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \text{en développant} \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\times\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B & \text{en utilisant 3.(a)} \\ & = & (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2 & \end{array}$$

Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ \mathbb{1}_{A\Delta B}=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2}$$

(e) Soient A, B et C trois parties de E. D'après la question 3.(c) deux ensembles sont égaux si et seulement si leurs fonctions caractéristiques sont égales, il s'agit donc de montrer que $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}=\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$. Pour cela, on va bien entendu se servir de la formule démontrée à la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta B\Delta C} & = & (\mathbb{1}_{(A\Delta B)}-\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & \Big((\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2-\mathbb{1}_C\Big)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_A^2+\mathbb{1}_B^2-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & \mathbb{1}_A^2+\mathbb{1}_B^2+4\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2+\mathbb{1}_C^2+2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-4\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\ & = & \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{B\Delta C})^2 \\ & = & \Big(\mathbb{1}_A - (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)\Big)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B^2 - \mathbb{1}_C^2 + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2 \\ & = & \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_C^2 + 4\mathbb{1}_B^2\mathbb{1}_C^2 - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 4\mathbb{1}_B^2\mathbb{1}_C - 4\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C^2 \\ & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \end{array}$$

Dans ces calculs, on a utilisé systématiquement que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B^2 = \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C^2 = \mathbb{1}_C$.
On a bien $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ et par suite :

$$\boxed{\text{La différence symétrique est associative}}$$

Cette question illustre l'importance de la la fonction caractéristique qui permet de démontrer une propriété sur les ensembles juste par un calcul algébrique.

5. Démontrons la surjectivité de Γ puis son injectivité.
► Soit $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$, trouvons-lui un antécédent par Γ. On pose $A = f^{-1}(\{1\})$, c'est bien une partie de E et on a pour tout $x \in E$:

$$\Gamma(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \underline{\mathbb{1}_A(x) = 1} \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow \underline{f(x) = 1}$$

Les assertions soulignées montrent que $\mathbb{1}_A = f$ puisque $\mathbb{1}_A$ et f sont à valeurs dans $\{0,1\}$.
On a trouvé un antécédent à f par Γ, c'est A.
► Prenons A et B deux parties de E et supposons que $\Gamma(A) = \Gamma(B)$, c'est-à-dire que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ et d'après la question 3.(c) cela donne $A = B$. Ce qui démontre que f est injective.

$$\boxed{\Gamma \text{ est une bijection}}$$

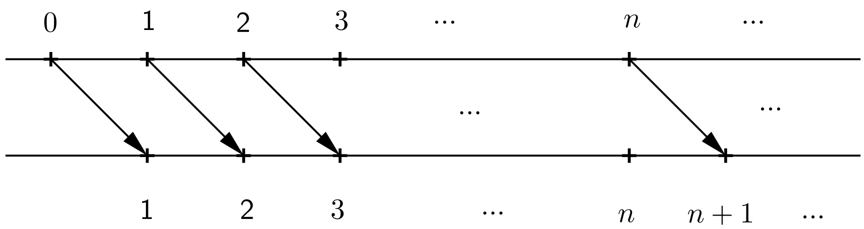
6. ► Soit B une partie de F. Soit $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$. Ainsi dans ce cas $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B \circ f(x) = \mathbb{1}_B(f(x)) = 1$.
► Soit $x \notin f^{-1}(B)$, on a $f(x) \notin B$. Ainsi dans ce cas $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B \circ f(x) = \mathbb{1}_B(f(x)) = 0$.
Dans les deux cas, les fonctions $\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$ et $\mathbb{1}_B \circ f$ coïncident

$$\boxed{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f}$$

Problème 1

1. La bijection la plus simple entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ est :

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

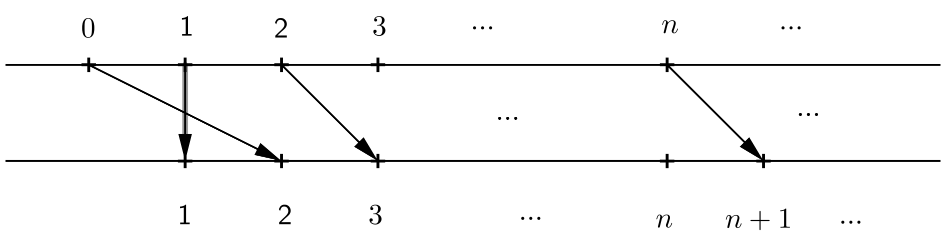


Pour démontrer que φ est une bijection, on pourrait démontrer qu'elle est injective et surjective ou, plus simplement, donner sa bijection réciproque :

$$\psi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}$$

On a bien $\varphi_1 \circ \psi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$ et $\psi_1 \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Voici une autre bijection :

$$\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad n \notin \{0,1\} \\ 2 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases} \end{array}$$



Sa bijection réciproque est :

$$\psi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si} \quad n \notin \{1,2\} \\ 0 & \text{si} \quad n = 2 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases} \end{array}$$

$\boxed{\mathbb{N} \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}^*}$

2. Il est ici moins facile de trouver directement la bijection réciproque de f. Montrons qu'elle est injective puis surjective. Dans la démonstration, on va utiliser que n est pair si et seulement si $f(n) \geq 0$ et n est impair si et seulement si $f(n) < 0$.
► *Injectivité.* Soient n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$, démontrons que $n = n'$. Étant donné que $f(n) = f(n')$, d'après la remarque préliminaire, il est nécessaire que n et n' aient la même parité.

- Si n et n' sont pairs alors $f(n) = f(n') \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \Leftrightarrow n = n'$.
- Si n et n' sont impairs alors $f(n) = f(n') \Leftrightarrow -\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \Leftrightarrow n = n'$.

Ce qui démontre que f est injective.

▶ *Surjectivité*. Soit $n \in \mathbb{Z}$, trouvons-lui un antécédent par f.

- Si $n \geq 0$, on $f(2n) = n$ ainsi $2n$ est un antécédent de n par f.
- Si $n < 0$, on a $f(-1-2n) = -\dfrac{(-1-2n)+1}{2} = n$ ainsi $-1-2n$ est un antécédent de n par f.

Remarquons que cet antécédent est bien un entier naturel car $n < 0$ donc $n \leq -1$ puisque n est un entier et par suite $-1-2n \geq 0$.

Ainsi f est une bijection et aussi surprenant que cela puisse paraître :

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ est en bijection avec } \mathbb{Z}}$$

Au cours de cette question, on a d'ailleurs trouvé la bijection réciproque de f, c'est :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} & : & \mathbb{Z} & \to \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto \begin{cases} 2n & si \quad n \geq 0 \\ -1-2n & si \quad n \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

3. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, tentons de l'écrire sous la forme demandée.

▶ Si $m = 1$, on a : $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ ainsi choisir $k = 0$ et $n = 0$ convient.

▶ Si $m \geq 2$, on a déjà vu en cours que m peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers. C'est-à-dire qu'il existe des nombres premiers impairs p_1, p_2,..., p_r et des entiers naturels k, a_1, a_2,..., a_r avec $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$m = 2^k p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$$

Notons que k peut être éventuellement nul dans le cas où m est un entier impair. Le produit $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ est un entier impair puisque les nombres premiers mis en jeu sont impairs donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} = 2n+1$. Finalement, on a bien $m = 2^k(2n+1)$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ m = 2^k(2n+1)}$$

Vous pouvez, en guise d'exercice, démontrer ce résultat par récurrence forte.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$ trouvons-lui un antécédent par g. On a $m+1 \in \mathbb{N}^*$ on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à $m+1$, il existe $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+1 = 2^k(2n+1)$ ou encore $m = 2^k(2n+1)-1$. C'est-à-dire $g(k,n) = m$.

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

(c) Donnons-nous $(k,k',n,n') \in \mathbb{N}^4$ et supposons que $g(k,n) = g(k',n')$, c'est-à-dire :

$$2^k(2n+1) = 2^{k'}(2n'+1) \quad (\bigstar)$$

Considérons plusieurs cas :

▶ si $k > k'$, on divise l'égalité par $2^{k'}$ ce qui donne $2^{k-k'}(2n+1) = 2n'+1$. Ceci est absurde puisque le membre de gauche est pair et le membre de droite est impair.

▶ si $k' > k$, on divise l'égalité par 2^k ce qui donne $2n+1 = 2^{k'-k}(2n'+1)$. Ceci est absurde puisque le membre de gauche est impair et le membre de droite est pair.

Nécessairement $k = k'$ et en divisant l'égalité ($\bigstar$) par 2^k, on obtient $2n+1 = 2n'+1$ d'où $n = n'$. Finalement $(k,n) = (k',n')$.

$$\boxed{g \text{ est injective}}$$

(d) La fonction g est surjective d'après la question 3.(b) et injective d'après la question 3.(c).

$$\boxed{g \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^2 \text{ dans } \mathbb{N}}$$

4. Considérons l'hypothèse de récurrence suivante valable pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_p \ : \ \text{"il existe une bijection entre } \mathbb{N}^p \text{ et } \mathbb{N}\text{"}$$

► *Initialisation.* Pour $p = 1$, le résultat est évident puisque pour la bijection en question on peut choisir l'identité. Remarquons d'ailleurs que la question 3. démontre que $\mathcal{H}_2$ est vraie.

► *Hérédité.* Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons avoir trouvé une bijection φ_p entre $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N}$ et démontrons qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^{p+1}$ et $\mathbb{N}$. On pose :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{p+1} & : & \mathbb{N}^{p+1} & \to & \mathbb{N} \\ & & (n_1, n_2, ..., n_{p+1}) & \mapsto & g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n_{p+1}) \end{array}$$

Il reste à démontrer que φ_{p+1} est bien une bijection.

Injectivité. Supposons que $\varphi_{p+1}(n_1, n_2, ..., n_{p+1}) = \varphi_{p+1}(n'_1, n'_2, ..., n'_{p+1})$ avec $(n_i)_{1 \leq i \leq p+1} \in \mathbb{N}^{p+1}$ et $(n'_i)_{1 \leq i \leq p+1} \in \mathbb{N}^{p+1}$. On a :

$$g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n_{p+1}) = g(\varphi_p(n'_1, ..., n'_p), n'_{p+1})$$

L'application g est injective, ainsi l'égalité précédente implique que : $\varphi_p(n_1, ..., n_p) = \varphi_p(n'_1, ..., n'_p)$ et $n_{p+1} = n'_{p+1}$. De plus, par hypothèse de récurrence, φ_p est injective donc $n_1 = n'_1$, $n_2 = n'_2$,..., $n_p = n'_p$. Finalement :

$$\forall i \in [\![1, p+1]\!], \ n_i = n'_i$$

Ce qui démontre l'injectivité.

Surjectivité. Soit $m \in \mathbb{N}$, trouvons-lui un antécédent par φ_{p+1}. Déjà, on sait, d'après la question 3. que g est surjective, c'est-à-dire qu'il existe $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $g(k,n) = m$. D'autre part φ_p est surjective donc il existe $(n_1, ..., n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $\varphi_p(n_1, ..., n_p) = k$. On a :

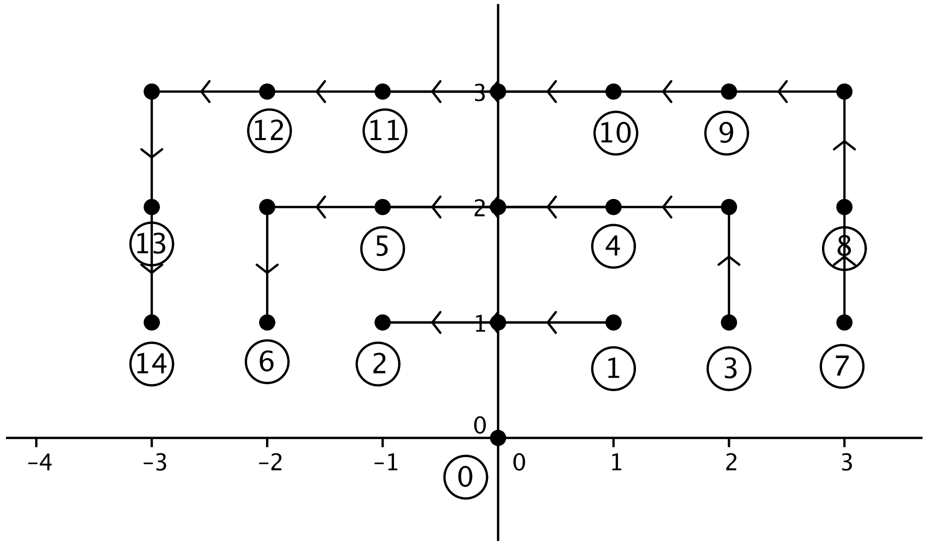
$$\varphi_{p+1}(n_1, n_2, ..., n_p, n) = g(\varphi_p(n_1, ..., n_p), n) = g(k,n) = m$$

L'application φ_{p+1} est bien surjective.

Finalement l'application φ_{p+1} est une bijection de $\mathbb{N}^{p+1}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{N}^p \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}}$$

5. Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ revient à trouver une façon de compter les éléments de $\mathbb{Q}$. Le schéma suivant explique comment faire :



Le point de coordonnées (p,q) correspond au rationnel $\dfrac{p}{q}$ où $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. On numérote les points comme indiqué sur le dessin, on saute les rationnels que l'on a déjà pris en compte. Ainsi on définit $\varphi\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ une bijection. Par exemple $\varphi(10)=\dfrac{1}{3}$ car 10 correspond au point de coordonnées $(1,3)$ sur le dessin. Le point $(3,3)$, par exemple, n'a pas de numéro (c'est-à-dire d'antécédent par φ) car $\dfrac{3}{3}=\dfrac{1}{1}$ que l'on a déjà compté précédemment. Ceci explique que φ est injective, une même fraction n'ayant pas deux numéros. La fonction φ est bien surjective puisque si $r\in\mathbb{Q}$ avec $r=\dfrac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux, le point de coordonnées (p,q) aura un numéro.

$$\boxed{\mathbb{N}\text{ est en bijection avec }\mathbb{Q}}$$

Un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit dénombrable, puisque grâce à cette bijection on peut compter les éléments de l'ensemble en question. Le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) a démontré que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Vous trouverez sur internet des explications sur sa démonstration appelée "diagonale de Cantor".

6. C'est l'occasion d'utiliser une récurrence forte. On considère l'hypothèse suivante valable pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n\ :\ "h(n)=n"$$

► *Initialisation.* Par hypothèse h est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $h(0)\leq 0$. Ceci implique que $h(0)=0$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

► *Hérédité.* Fixons un entier $n\in\mathbb{N}$ et supposons que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a $h(k)=k$. Démontrons que $h(n+1)=n+1$. Par hypothèse, on a $h(n+1)\leq n+1$ or pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, k possède un antécédent par h et comme h est injective, on ne peut avoir $h(n+1)=k$. Ainsi, on a $h(n+1)=n=1$. Ceci démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et achève la récurrence.

On conclut grâce au principe de récurrence que :

$$\boxed{h\text{ est l'identité de }\mathbb{N}\text{ dans }\mathbb{N}}$$

Problème 3

Partie I

1. Comme $H \neq \{0\}$, il existe $x \in H$, avec $x \neq 0$. Si $x > 0$, alors $x \in H_+$, sinon, $-x > 0$ et $-x \in H$, car H est un groupe, puis $-x \in H_+$. Dans les deux cas, $H_+ \neq \varnothing$. De plus, H_+ est minorée par 0, donc, d'après la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, $\inf H_+$ existe.
2. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) D'après la propriété de la borne supérieure, il existe $h_1 \in H_+$ tel que $\alpha \leqslant h_1 < 2\alpha$. De plus, si $\alpha \notin H_+$, alors $a < h_1$. De même, il existe $h_2 \in H_+$ tel que $\alpha < h_2 < h_1$, d'où $0 < h_1 - h_2 < \alpha$. De plus, comme H est un groupe, on a $h_2 - h_1 \in H$. Ainsi $h_2 - h_1 \in H_+$, avec $h_2 - h_1 < \alpha$, ce qui contredit la définition de α. Donc $\alpha \in H_+$ (c'est un minimum).
   (b) Il suffit de prendre $m = \lfloor x/\alpha \rfloor$.
   (c) D'après la question 2.a, $\alpha \in H$. De plus, H est un sous-groupe, donc $\alpha\mathbb{Z} \subset H$. Soit $x \in H$. D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant x - m\alpha < \alpha$. Comme $x - m\alpha \in H$, car $m\alpha \in H$, il vient $x - m\alpha = 0$ (sinon cela contredirait la définition de α). Ainsi, $x = m\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$, puis $H \subset \alpha\mathbb{Z}$. En conclusion, $H = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Soient x et y dans $\mathbb{R}$, avec $x < y$. Comme $\alpha = 0$ et $0 \notin H_+$, la propriété de la borne supérieure assure l'existence de $h \in H_+$ tel que $0 < h < y - x$. Pour $m = \lfloor x/h \rfloor$, on a $x < (m+1)h$ et $mh \leqslant x$, d'où $x < mh + h \leqslant x + h < y$. Enfin, on a bien $(m+1)h \in H$ compris entre x et y. Ainsi, H est dense dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
4. Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, ou dense dans $\mathbb{R}$.
5. (a) Pour $u = v = 0$, on a $0 \in G$, et, pour tout $(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}^4$, on a $(ua + vb) - (wa + tb) = (u - w)a + (v - t)b \in G$.
   (b) Pour $(u, v) \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{u}{3} + \dfrac{v}{7} = \dfrac{7u + 3v}{21}$ et $|7u + 3v| \geqslant 1$, d'où $\alpha \geqslant \dfrac{1}{21}$. Le théorème de Bézout donne $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$, d'où $\dfrac{1}{21} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{7}$. Ainsi, $\dfrac{1}{21} = \min G \cap \mathbb{R}_+^*$, puis $G = \dfrac{1}{21}\mathbb{Z}$.
   (c) On suppose que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$, avec $(p, q) \in\in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu + qv = 1$. Par conséquent, $1 \in p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$, puis $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. On a alors :
   $$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b(\frac{a}{b}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = b(\frac{p}{q}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = \frac{b}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}.$$
   Réciproquement, si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$, avec $c \in \mathbb{R}$. En particulier, a et b sont dans $c\mathbb{Z}$, d'où $a = cu$ et $b = cv$, avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v}$ est un nombre rationnel.