Concours Blanc N°1

Nombres Complexes
Suites Numériques

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. On considère l'application

$$\varphi: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

a. Déterminer les antécédents de i par φ.

b. L'application φ est-elle injective ? Justifier.

c. Montrer que φ est surjective.

d. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos\theta$ par φ. On précisera le nombre de ces antécédents suivant les valeurs de θ.

2. On considère un entier $n \geqslant 2$ ainsi que l'application

$$\psi: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right.$$

a. Déterminer les antécédents de $2\sqrt{12} - 4i$ par ψ lorsque $n = 3$.

b. On revient au cas général ($n \geqslant 2$). L'application ψ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

c. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ.

3. On pose $\xi = \varphi \circ \psi$.

a. L'application ξ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

b. On se donne $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par ξ. On en précisera le nombre suivant les valeurs de θ.

4. On considère l'application

$$\alpha: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$$

a. L'application α est-elle injective ? surjective ? Justifier.

b. Déterminer les antécédents de i par $\beta = \varphi \circ \alpha$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

1. Ecrire $1 + i$ sous forme exponentielle.
2. Justifier que $S_n + iT_n = (1+i)^{2n}$.
3. En déduire des expressions des sommes S_n et T_n faisant intervenir les fonctions cos et sin.

Exercice 3.

1. On considère l'équation $(E) : \ (1+iz)^5 = (1-iz)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - **a.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Montrer que $\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = i \tan \theta$.
   - **b.** Déterminer les solutions complexes de (E) à l'aide des racines cinquièmes de l'unité. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tan.
   - **c.** Développer $(1+iz)^5$ et $(1-iz)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. En déduire les solutions de (E) sous une autre forme.
   - **d.** Déterminer le sens de variation de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire les valeurs de $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$.
2. On se donne maintenant $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(E_\alpha) : \ (1+iz)^5(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^5(1 + i\tan\alpha)$$

   d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   - **a.** Montrer que $\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}$.
   - **b.** Résoudre l'équation $Z^5 = e^{2i\alpha}$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   - **c.** En déduire les solutions de (E_α) que l'on exprimera à l'aide de la fonction tan.

Exercice 4.

1. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   - **a.** Que vaut j^3 ?
   - **b.** Calculer $1 + j + j^2$.
   - **c.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que

$$(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

   - **d.** Ecrire $-j$ et $-j^2$ sous forme exponentielle.
2. On considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectifs a, b et c dans un repère orthonormé. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
   - **a.** Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = -j^2$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -j$.
   - **b.** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Problème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but de ce devoir est étudier la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Ces suites sont appelées des séries de Riemann[1]. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la limite éventuelle de (S_n) quand n tend vers $+\infty$.

Dans la partie A, nous étudions le cas où $\alpha = 1$. Dans la partie B, nous étudions le cas où $\alpha = 2$ et nous déterminons la limite de la suite $(S_n$

Les parties A et B sont indépendantes. Les passages en italique sont des commentaires historiques et ne sont pas utiles dans les questions suivantes.

Partie A - Cas où $\alpha = 1$

Le but de cette partie est donc d'étudier la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite s'appelle la série harmonique, c'est pour cela qu'on la note H_n ici au lieu de S_n.

1. **Divergence de la série harmonique.**

   (a) Soit k un entier naturel non nul, pour tout $x \in [k, k+1]$ donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$.

   (b) En intégrant, en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

   (c) En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à n, démontrer que :

   $$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

   En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

   (d) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

   C'est Oresme[2] qui a proposé la première preuve de la divergence de la série harmonique en 1360. Cette preuve manque de rigueur mais l'idée est simple à comprendre, vous la trouverez par exemple dans l'article Wikipédia sur la série harmonique.

   (e) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

   Cette dernière égalité permet de dire qu'en un certain sens la suite (H_n) tend vers $+\infty$ "comme" la suite $(\ln(n))$. On dit alors que ces deux suites sont équivalentes, ce que l'on note $H_n \sim \ln(n)$.

---

1. Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Il a apporté de nombreuses contributions à l'analyse et la géométrie différentielle et a défini certains outils mathématiques qui ont servi plus tard au développement de la théorie de la relativité.
2. Nicolas Oresme (1320-1382) a apporté des contributions à différents domaines : philosophie, astronomie, mathématique, économie, musique et physique. Il a été évêque de Lisieux et conseiller du roi Charles V.

2. **Encadrement de H_n.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = H_n - \ln(n)$$

$$v_n = H_n - \frac{1}{n} - \ln(n)$$

   (a) i. Montrer que (u_n) est décroissante. On pensera à réutiliser l'inégalité de la question 1.(b)

   ii. Montrer que (v_n) est croissante.

   iii. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

   iv. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter.

   On note γ la limite commune de ces deux suites, γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni[3]

   (b) Justifier que $\gamma \in [0,1]$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$.

   (d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{n}$.

   Une valeur approchée de γ à 10^{-3} près est $\gamma \approx 0,577$. On ignore actuellement si γ est un rationnel.

3. **Applications.**

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

   i. Montrer que la suite (K_n) est croissante majorée.

   ii. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = H_{2n} - H_n$.

   iii. En déduire la limite de la suite (K_n).

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   i. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $L_{2n} = K_n$. Donner la limite de (L_{2n}).

   ii. Donner la limite de (L_{2n+1}).

   iii. En déduire que (L_n) converge et donner sa limite.

4. **Programmation en Python.** Bonus

   (a) Écrire une fonction en Python qui prend en paramètre un entier naturel non nul n et renvoie H_n.

   (b) Écrire une fonction en Python pour trouver le plus petit entier naturel n tel que $H_n \geq 1000$. Que pensez-vous de cette fonction ?

   (c) Écrire une fonction en Python qui donne une valeur approchée de γ à 10^{-l} près où $l \in [\![1, 15]\!]$ sera placé en paramètre de la fonction.

3. Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse. C'est sans aucun doute l'un des plus grands et plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Lorenzo Mascheroni (1750-1800) est un mathématicien italien.

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

Soit n un entier naturel non nul. Dans cette partie, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le but est d'étudier la convergence de la suite (S_n) et de trouver sa limite.

1. **Convergence.** Soit $k \geq 2$ un entier.
   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire, en sommant les inégalités précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq 2$.
   (c) Démontrer que la suite (S_n) est strictement croissante.
   (d) Justifier que la suite (S_n) converge.

   Les questions suivantes visent à montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2. **Calcul de la limite.** Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^k dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^k dt.$$

   (a) Calculer I_0, J_0, I_1.
   (b) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer J_1.

   On ne cherchera pas à calculer explicitement I_k et J_k pour répondre aux questions suivantes.

   (c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $I_k > 0$.
   (d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2} I_k$.
   (e) i. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, à l'aide d'une étude de fonction montrer que : $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$.
   ii. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+2})$.
   iii. Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{J_k}{I_k}\right)$ converge vers 0.
   (f) i. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}.$$

   ii. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{J_k}{I_k} - \dfrac{J_{k+2}}{I_{k+2}} = \dfrac{2}{(k+2)^2}$.
   iii. En sommant les égalités précédentes, démontrer que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

On s'autorisera à noter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ maintenant que l'on sait que la limite existe.
C'est Euler qui en 1735 a trouvé cette valeur, son approche est différente de celle présentée dans ce devoir.

CORRIGE

Solution 1.

1. **a.** Il s'agit de résoudre l'équation $z+\frac{1}{z}=i$. Cette équation équivaut à $z^2-iz+1=0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $-5=(i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc

$$\frac{i}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{2}(1-\sqrt{5})$$

b. Comme i possède deux antécédents par φ, φ n'est pas injective.

c. Soit $Z\in\mathbb{C}$. On considère l'équation $f(z)=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2-Zz+1=0$. Cette équation du second degré admet au moins une solution. Une solution de cette équation ne peut être nulle puisque $0^2-Z\times 0-1=-1\neq 0$. Ainsi l'équation $f(z)=Z$ possède donc une solution dans $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire que Z possède un antécédent par φ. L'application φ est donc surjective.

d. Les antécédents de $2\cos\theta$ par φ sont les solutions de l'équation $\varphi(z)=2\cos\theta$ qui équivaut à $z^2-2z\cos\theta+1=0$. Puisque $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$, les solutions de cette équation sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
Il n'y a en fait qu'une solution lorsque le discriminant $4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta$ est nul et deux sinon. Or le discriminant n'est nul que si $\theta\equiv 0[\pi]$.
Finalement, $2\cos\theta$ possède deux antécédents lorsque $\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et un unique antécédent lorsque $\theta\equiv 0[\pi]$. On peut même préciser que, lorsque $\theta\equiv 0[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=1$ et que, lorsque $\theta\equiv\pi[2\pi]$, cet unique antécédent est $e^{i\theta}=e^{-i\theta}=-1$.

2. **a.** Les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ lorsque $n=3$ sont ses racines cubiques. Or $2\sqrt{12}-4i=8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ donc les antécédents de $2\sqrt{12}-4i$ par ψ sont $2e^{-\frac{i\pi}{18}}$, $2e^{\frac{11i\pi}{18}}$ et $2e^{\frac{23i\pi}{18}}$.

b. De manière générale, tout complexe non nul possède n racines $n^{\text{èmes}}$ donc n antécédents par ψ. L'application ψ est donc surjective. Mais, puisque $n\geqslant 2$, ψ n'est pas injective.

c. Les antécédents de $e^{in\theta}$ par ψ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $e^{ni\theta}$, c'est-à-dire $e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

3. **a.** On sait que ψ et φ sont surjectives donc $\xi=\varphi\circ\psi$ l'est également. Par contre, $\xi=\varphi\circ\psi$ ne peut-être injective car ψ le serait alors également, ce qui n'est pas.

b. D'après la question **1.d**, les antécédents de $2\cos(n\theta)$ par φ sont $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ (éventuellement confondus lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$).
D'après la question **2.c**, les antécédents de $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ possèdent en tout $2n$ antécédents mais, lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$ sont confondus donc leurs antécédents égalements.
Finalement $2\cos(n\theta)$ possède $2n$ antécédents par ξ lorsque $n\theta\not\equiv 0[\pi]$, à savoir les complexes

$$e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{pour} \qquad k\in[\![0,n-1]\!]$$

Lorsque $n\theta\equiv 0[\pi]$, $2\cos(n\theta)$ ne possède que n antécédents. On peut préciser que, lorsque $n\theta\equiv 0[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=1$, qui équivaut à $(z^n-1)^2=0$. De même, lorsque $n\theta\equiv\pi[2\pi]$, ces antécédents sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de -1. En effet, ces antécédents sont les solutions de l'équation $\xi(z)=-1$, qui équivaut à $(z^n+1)^2=0$.

4. **a.** Puisque $\alpha(0)=\alpha(2i\pi)=1$, α n'est pas injective. Soit $Z\in\mathbb{C}^*$. Notons θ un argument de Z. Alors $|Z|>0$ don on peut définir $\ln(|Z|)+i\theta$ qui est un antécédent de Z par α. Ainsi α est surjective.

b. Les antécédents de i par φ sont $\frac{i}{2}(1+\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{i}{2}(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Les antécédents de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$ par α sont respectivement les complexes

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \qquad \text{pour} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Ce sont donc également les antécédents de i par $\beta=\varphi\circ\alpha$.

SOLUTION 2.

1. On a évidemment $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.
2. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2k}i^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}i^{2k+1} && \text{en séparant les termes d'indices pairs et impairs}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k i && \text{car } i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k\\ &= S_n+iT_n\end{aligned}$$

3. Tout d'abord,

$$(1+i)^{2n}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2n}=2^n e^{\frac{ni\pi}{2}}$$

De plus, $(1+i)^{2n}=S_n+iT_n$ et S_n et T_n sont *réels* (et même entiers) donc ce sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $(1+i)^{2n}$. Finalement,

$$S_n=2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad T_n=2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

SOLUTION 3.

1. **a.** On utilise la méthode de l'arc-moitié.

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}=\frac{2ie^{i\theta}\sin\theta}{2e^{i\theta}\cos\theta}=i\tan\theta$$

b. Remarquons que $-i$ n'est pas solution de (E) et que pour $z\neq -i$, $1-iz\neq 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}(1+iz)^5=(1-iz)^5 &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5=1\\ &\iff \frac{1+iz}{1-iz}\in\mathbb{U}_5\\ &\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ \frac{1+iz}{1-iz}=e^{\frac{2ik\pi}{5}}\\ &\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ 1+iz=e^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-iz)\\ &\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1)} && \text{car } \forall k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ e^{\frac{2ik\pi}{5}}\neq -1\\ &\iff \exists k\in\{-2,-1,0,1,2\},\ z=\tan\frac{k\pi}{5} && \text{d'après la question } \mathbf{1.a}\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les *réels* $-\tan\frac{2\pi}{5}$, $-\tan\frac{\pi}{5}$, 0, $\tan\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{2\pi}{5}$.

c. Tout d'abord, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$(1+iz)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}iz+\binom{5}{2}(iz)^2+\binom{5}{3}(iz)^3+\binom{5}{4}(iz)^4+\binom{5}{5}(iz)^5=1+5iz-10z^2-10iz^3+5z^4+iz^5$$

On en déduit que

$$(1-iz)^5=1-5iz-10z^2+10iz^3+5z^4-iz^5$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(1+iz)^5=(1-iz)^5 &\iff 10iz-20iz^3+2iz^5=0\\ &\iff z(5-10z^2+z^4)=0\\ &\iff z=0 \text{ ou } z^4-10z^2+5=0\\ &\iff z=0 \text{ ou } z^2=5+2\sqrt{5} \text{ ou } z^2=5-2\sqrt{5}\\ &\iff z=0 \text{ ou } z=\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z=-\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ ou } z=\sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ ou } z=-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

d. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Ainsi la fonction tan est-elle croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Or

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{5} < 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

et

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

de sorte qu'en particulier, $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

2. a.

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

b. Il s'agit d'un problème d'extraction de racines cinquièmes. Les solutions sont donc les complexes $e^{\frac{2i(\alpha+k\pi)}{5}}$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

c. L'équation (E_α) équivaut à l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5 = e^{2i\alpha}$. D'après la question précédente, les solutions de (E_α) sont les complexes z tels qu'il existe $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{5}}$. Or, pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, en posant $\alpha_k = \frac{\alpha+k\pi}{5}$

$$\begin{aligned} & \frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i\alpha_k} \\ \iff \quad & z = \frac{e^{2i\alpha_k}-1}{i(e^{2i\alpha_k}+1)} \\ \iff \quad & z = \tan\alpha_k \qquad \text{d'après la question } \textbf{1.a} \end{aligned}$$

Les solutions de (E_α) sont donc les réels $\tan\alpha_k$ pour $k \in \{-2,0,1,2\}$, autrement dit les réels $\tan\left(\frac{\alpha-2\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha-\pi}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha}{5}\right)$, $\tan\left(\frac{\alpha+\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{5}\right)$.

Solution 4.

1. a. On a évidemment $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

b. On reconnaît la somme de trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$. Ainsi

$$1+j+j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$$

puisque $j^3 = 1$.

c. En développant,

$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2+b^2j^3+c^2j^3+ab(j+j^2)+bc(j+j^2)+ca(j+j^2)$$

Or $j^3 = 1$ et $j+j^2 = -1$ donc

$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

d.

$$\begin{aligned} -j &= -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \\ -j^2 &= -e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\pi}e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

2. a. D'après la question **1.c**, $(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = 0$. Ainsi $a+bj+cj^2 = 0$ ou $a+bj^2+cj = 0$.

► Si $a+bj+cj^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} && \text{car } -a = bj+cj^2 \\ &= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\ &= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} && \text{car } 1+j+j^2 = 0 \\ &= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\ &= -\frac{1}{j} = -j^2 && \text{car } j^3 = 1 \end{aligned}$$

► Si $a + bj^2 + cj = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b-a} &= \frac{c+bj+cj^2}{b+bj+cj^2} \qquad \text{car } -a = bj + cj^2 \\
&= \frac{c(1+j^2)+bj}{b(1+j)+cj^2} \\
&= \frac{-cj+bj}{-bj^2+cj^2} \qquad \text{car } 1+j+j^2=0 \\
&= \frac{j(b-c)}{j^2(c-b)} \\
&= -\frac{1}{j} = -j^2 \qquad \text{car } j^3 = 1
\end{aligned}$$

b. D'après la question **1.d**, $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{|c-a|}{|b-a|} = 1 \qquad \text{ou enfin} \qquad |b-a| = |c-a|$$

et

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Ces deux conditions s'écrivent également $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

Problème

Partie A - Cas où $\alpha = 1$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}}$$

(b) Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer l'inégalité précédente entre k et $k+1$, ce qui donne :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

Or :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} = \left[\frac{x}{k+1}\right]_k^{k+1} = \frac{k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

De même, on démontre que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$.

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{k+1} \leq \Big[\ln(x)\Big]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} = H_{n+1} - 1$$

La somme centrale est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \qquad (\bigstar)$$

L'inégalité de droite nous donne : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n}$

D'autre part, on peut utiliser l'inégalité $(\bigstar)$ avec "$n = n-1$", c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2,\ H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1}$$

En particulier, pour $n \geq 2$, on a : $\underline{H_n \leq \ln(n) + 1}$. On vérifie que cette inégalité demeure pour $n = 1$.

Finalement avec les inégalités soulignées, nous obtenons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

(d) On a : $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après l'inégalité obtenue à la question précédente, cela implique que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

(e) Pour démontrer ceci, on divise l'inégalité obtenue à la question (c) par $\ln(n)$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$$

Pour tout $n \geq 2$, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

D'autre part, pour $n \geq 2$, on a : $\dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1}$$

2. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n = (H_{n+1}-\ln(n+1))-(H_n-\ln(n)) = H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln(n) = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)$$

Ici, on peut poser une fonction et l'étudier mais il est plus simple d'utiliser l'inégalité démontrée à la question 1.(b), pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n)$. Ce qui démontre bien que $u_{n+1}-u_n \leq 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$$

ii. On utilise la même méthode qu'à la question précédente toujours avec la question 1.(b) :

$$v_{n+1}-v_n = \left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(H_n-\frac{1}{n}-\ln(n)\right) = \frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n) \geq 0$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0}$$

iv. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après les trois questions précédentes, on a :

$$v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1, d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite réelle que l'on va noter α.
La suite (v_n) est croissante et majorée par u_1, elle converge vers une limite réelle que l'on va noter β.
Or, d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \alpha - \beta = 0$. Ainsi $\alpha = \beta$ et :

$$\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une limite commune}}$$

(b) On reprend l'inégalité (★★) démontrée à la question précédente et l'on passe à la limite dans cette inégalité. Cela donne : $v_1 \leq \gamma \leq u_1$. Or $v_1 = 0$ et $u_1 = 1$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$$

(c) La suite (u_n) converge en décroissant vers γ et la suite (v_n) converge en croissant vers γ, ainsi pour tout entier naturel non nul n, on a : $v_n \leq \gamma \leq u_n$. Comme $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$, cela se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{n}}$$

On a $\gamma \approx 0.577215664901532$. La constante γ intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, à titre d'exemple on peut citer :

- $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = -\gamma$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx = -\gamma$
- *Le nombre moyen de diviseurs d'un entier naturel n est de l'ordre de grandeur de :* $\ln(n) + 2\gamma - 1$.

(d) À la question 2.(c), on a démontré que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$. En remplaçant u_n par sa définition, on a : $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}}$$

3. (a) i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$1 \leq k \leq n \Leftrightarrow n + 1 \leq n + k \leq 2n \Leftrightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$$

En particulier $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1$$

$$\boxed{(K_n) \text{ est majorée par } 1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
K_{n+1} - K_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{en isolant le dernier terme} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k}\right) \quad \text{en regroupant les deux sommes} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{(K_n) \text{ est strictement croissante}}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = K_n$$

Au cours de ce calcul, on a effectué une réindexation de la somme en posant $i = k - n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_n = H_{2n} - H_n}$$

iii. On reprend l'inégalité démontrée à la question 3.(e), on a :

$$\ln(n) + \gamma \leq H_n \leq \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n} \text{ ce qui implique que } -\Big(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{n}\Big) \leq -H_n \leq -\Big(\ln(n) + \gamma\Big)$$

On a également : $\ln(2n) + \gamma \leq H_{2n} \leq \ln(2n) + \gamma + \dfrac{1}{2n}$. En sommant ces deux inégalités, il vient :

$$\ln(2n) - \ln(n) - \frac{1}{n} \leq H_{2n} - H_n \leq \ln(2n) - \ln(n) + \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \ln(2) - \frac{1}{n} \leq H_{2n} - H_n \leq \ln(2) + \frac{1}{2n}$$

D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} H_{2n} - H_n = \ln(2)$. D'après la question précédente, ceci implique que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} K_n = \ln(2)}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'égalité démontrée à la question 4.(a).ii., on a :

$$\begin{aligned}
K_n &= H_{2n} - H_n \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \qquad (1) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \qquad (2) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= L_{2n}
\end{aligned}$$

Expliquons le passage de (1) à (2) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ est égale à la somme des $\frac{1}{k}$ pour tous les entiers k entre 1 et $2n$ à laquelle on soustrait la somme des $\frac{1}{k}$ pour k pair. C'est pour cela qu'il reste la somme des $\frac{1}{k}$ pour k impair.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_{2n} = K_n}$$

D'après la question 4.(a).iii., on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \ln(2)$, ainsi grâce à la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_{2n} = \ln(2)}$$

ii. D'après la définition de la suite (L_n), pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$L_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = L_{2n} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = 0$ ainsi en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} L_{2n} = \ln(2)$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_{2n+1} = \ln(2)}$$

iii. D'après la question i., les termes de rang pair de la suite (L_n) convergent vers $\ln(2)$ et la question précédente démontre que c'est également le cas des termes de rang impair. Il est intuitif que cela implique que tous les termes de la suite convergent vers $\ln(2)$, nous démontrerons ceci plus rigoureusement dans le chapitre consacré aux suites.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)}$$

On peut noter, à titre culturel, que cette formule se généralise :

$$\forall x\in]-1,1],\ \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

4. (a) Voici pour la première fonction :

```python
def H(n):
    """renvoie la valeur de H_n"""
    S = 0
    for k in range(1, n + 1): # on somme de 1 à n
        S += 1 / k # on ajoute le terme à la somme courante
    return(S)
```

(b) On utilise une boucle while pour tester la condition de l'énoncé :

```python
def sup1000():
    """renvoie le plus petit n tel que H_n >= 1000"""
    S, k = 0, 1
    while S < 1000: # on ajoute le terme suivant tant que la condition n'est pas vérifiée
        S += 1 / k
        k += 1
    return(k - 1)
```

Cette fonction ne va pas se terminer car d'après la question 1.(c), on a pour tout $n\geq 1$, $H_n-1\leq\ln(n)$ et $\ln(n)\geq 1000$ est équivalent à $n\geq e^{1000}$. Le nombre de passages dans la boucle while sera de l'ordre de grandeur de e^{1000}, ce qui est clairement beaucoup trop. La fonction ne s'arrêtera pas.

(c) D'après la question 2.(c), on a :

$$0\leq u_{10^l}-\gamma\leq 10^{-l}$$

Ainsi $u_{10^l}=H_{10^l}-\ln(10^l)$ est une valeur approchée de γ à 10^{-l} près, d'où le programme suivant :

```python
from math import log

def approx_gamma(l):
    """renvoie une valeur approchée de gamma à 10^-l près"""
    return(H(10 ** l) - log(10 ** l))
```

Là aussi, pour l trop grand, la fonction ne s'arrêtera pas.

Partie B - Cas où $\alpha = 2$

1. (a) Pour tout $k \geq 2$, on a $k \geq k-1$ ce qui implique que $k^2 \geq k(k-1)$. En passant à l'inverse, on obtient :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

La dernière égalité provenant simplement d'une réduction au même dénominateur. On a démontré que :

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

(b) On a, en utilisant l'inégalité précédente et en isolant le terme $k = 1$ de la somme, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2$$

ceci en reconnaissant une somme télescopique.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 2}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons le signe de $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Ceci montre que :

$$\boxed{(S_n) \text{ est strictement croissante}}$$

(d) D'après le théorème de la limite monotone toute suite croissante et majorée converge. D'après 1.(b) la suite (S_n) est majorée et d'après 1.(c) elle est croissante d'où :

$$\boxed{(S_n) \text{ converge}}$$

2. (a) On a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(b) Le calcul de J_1 va demander un peu plus de travail, il va falloir faire deux intégrations par parties successives. L'idée est de faire chuter le degré la fonction $t \mapsto t^2$ en dérivant. On pose :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \cos(t) & u_1(t) = \sin(t) \\ v_1(t) = t^2 & v_1'(t) = 2t \end{array}$$

Les fonctions u_1, v_1, u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\cos(t)}_{u_1'(t)} dt = \Big[\underbrace{t^2}_{v_1(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2t}_{v_1'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u_1(t)} dt = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fait à nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2(t) = t & u_2'(t) = 1 \\ v_2'(t) = \sin(t) & v_2(t) = -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions u_2, v_2, u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt = \underbrace{\Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On obtient ainsi :

$$J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

En résumé, on a les valeurs suivantes qui nous serviront dans la suite :

$$\boxed{\begin{array}{ll} I_0 = \frac{\pi}{2} & J_0 = \frac{\pi^3}{24} \\ I_1 = 1 & J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{array}}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(t) > 0$ et par suite $\cos(t)^k > 0$. Par positivité de l'intégrale, cela donne :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k > 0}$$

(d) Pour effectuer une intégration par parties, il faut faire apparaître un produit de fonctions, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)^{k+1} dt.$$

On pose :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \cos(t) & u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos(t)^{k+1} & v'(t) = (k+1)(-\sin(t))\cos(t)^k \end{array}$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+2} &= \underbrace{\Big[\cos(t)^{k+1}\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k+1)\sin(t)^2\cos(t)^k dt = (k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^k dt \\ &= (k+1)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^k dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+2}(t)dt\Big) = (k+1)I_k - (k+1)I_{k+2}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $(k+2)I_{k+2} = (k+1)I_k$. On a bien démontré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} I_k}$$

(e) i. Pour démontrer ceci , étudions la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\sin(t) - t$, le but de la question est de prouver que f est positive quand $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction f est dérivable et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f' : t \mapsto \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1$$

ceci montre que f' est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puisque la fonction cosinus l'est. De plus $f'(0) = \dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, d'où le tableau de variation :

t	0		α		$\pi/2$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Ce qui prouve que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ f(t) \geq 0$. On a démontré que :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)}$$

ii. Soit $k \in \mathbb{N}$, en élevant au carré l'inégalité obtenue à la question précédente et en la multipliant par $\cos(t)^k$ qui est positif pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$0 \leq t^2\cos(t)^k \leq \frac{\pi^2}{4}\sin(t)^2\cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \cos(t)^2\Big)\cos(t)^k = \frac{\pi^2}{4}\Big(\cos(t)^k - \cos(t)^{k+2}\Big).$$

Par positivité de l'intégrale, intégrons l'inégalité précédente entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^k dt \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+2}\Big).$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+2}\Big)}$$

iii. Soit $k \in \mathbb{N}$, on divise la relation obtenue à la question précédente par I_k qui est strictement positif d'après la question 2.(c), cela donne :

$$0 \leq \frac{J_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(\frac{I_k}{I_k} - \frac{I_{k+2}}{I_k}\Big) = \frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \frac{k+1}{k+2}\Big)$$

ceci d'après la formule de la question 2.(d).

Or $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{k+2} = 1$ et par suite : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \frac{k+1}{k+2}\Big) = 0$.

La suite $\left(\dfrac{J_k}{I_k}\right)$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0}$$

(f) i. Là aussi il s'agit d'utiliser la méthode d'intégration par parties, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{array}{ll} u_1(t) = \cos(t)^{k+2} & u_1'(t) = (k+2)(-\sin(t))\cos(t)^{k+1} \\ v_1'(t) = 1 & v_1(t) = t \end{array}$$

Les fonctions u_1, v_1, u_1' et v_1' sont continues sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$I_{k+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{k+2} dt = \underbrace{\Big[t\cos(t)^{k+2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(t)^{k+1} dt. \qquad (\bigstar)$$

Pour transformer encore cette dernière intégrale, effectuons une nouvelle intégration par parties, on pose :

$$\begin{array}{ll} u_2(t) = \sin(t)\cos(t)^{k+1} & u_2'(t) = \cos(t)^{k+2} - (k+1)\sin(t)^2\cos^k(t) \\ v_2'(t) = t & v_2(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

Les fonctions u_2, v_2, u_2' et v_2' sont continues sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut ainsi utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(t)^{k+1} dt &= \underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos(t)^{k+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\Big(\cos(t)^{k+2} - (k+1)\sin(t)^2\cos(t)^k\Big) dt \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^{k+2} dt\Big) + \frac{k+1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2(1-\cos(t)^2)\cos(t)^k dt\Big) \\ &= -\frac{1}{2}J_{k+2} + \frac{k+1}{2}\Big(J_k - J_{k+2}\Big). \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'expression $(\bigstar)$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)J_k - (k+2)^2 J_{k+2}}{2}}$$

ii. Divisons la relation précédente par I_{k+2} qui est non nul d'après la question 2.(c), ceci donne :

$$1 = \frac{1}{2}\Big((k+1)(k+2)\frac{J_k}{I_{k+2}} - (k+2)^2\frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\Big)$$

Or $\dfrac{J_k}{I_{k+2}} = \dfrac{J_k}{\frac{k+1}{k+2}I_k} = \dfrac{k+2}{k+1}\dfrac{J_k}{I_k}$, d'où :

$$1 = \frac{1}{2}\Big((k+2)^2\frac{J_k}{I_k} - (k+2)^2\frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\Big).$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{J_k}{I_k} - \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}} = \frac{2}{(k+2)^2}}$$

iii. Sommons pour k allant de 0 à $n-2$ les égalités précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{J_k}{I_k} - \frac{J_{k+2}}{I_{k+2}}\right) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{2}{(k+2)^2}$$

On reconnait une somme télescopique, il reste :

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{J_n}{I_n} = 2(S_n - 1).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{J_n}{I_n} = 0$ d'après la question 2.(e).iii. Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, qui existe d'après la question 1. et passons à la limite dans la relation précédente :

$$\frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} = 2(l-1).$$

D'après la question 2.(a), on connait toutes les valeurs mises en jeu et on peut trouver la limite l voulue :

$$\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{1} = 2(l-1) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 = 2l - 2 \Leftrightarrow l = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}}$$