Simulation DS N°4

Fonction Réelles & Usuelles
Équations Différentielles

Exercice 1 ★★ **Calcul de $\zeta(2)$**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{I}_0, \mathrm{J}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{J}_1$.

2. Montrer que $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **a.** Montrer que pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

b. En déduire que $0 \leq \mathrm{J}_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n}$ converge vers 0.

5. **a.** Montrer que $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{1}{2}(n+2)\left((n+1)\mathrm{J}_n - (n+2)\mathrm{J}_{n+2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que $\dfrac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n} - \dfrac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \dfrac{2}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite de terme général S_n converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 ★★

Soient $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et

$$(\mathbf{E}) : (1 - e^{-t})y' + y = e^{-t}.$$

1. En remarquant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1)$, résoudre l'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ sur I.
2. Résoudre $(\mathbf{E})$ sur I.
3. *On cherche à prouver que* $(\mathbf{E})$ *admet une unique solution sur* I *admettant une limite finie en* 0^+.
   - **a.** Établir que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.
   - **b.** En déduire qu'il existe une unique solution de $(\mathbf{E})$ sur I, notée f, admettant en 0^+ une limite finie ℓ. On précisera la valeur de ℓ.
4. *Etude de* f *sur* I. *On prolonge désormais* f *en* 0 *en posant* $f(0) = \ell$. *Puisque* $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \ell = f(0)$, *la fonction* f *ainsi prolongée est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$.
   - **a.** Étudier les variations de f sur I. On précisera la limite de f en $+\infty$.
   - **b.** Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x.$$
   - **c.** En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
   - **d.** Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 ★★ **Équation fonctionnelle**

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
   - **a.** Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   - **b.** Démontrer que la fonction f est impaire.
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **a.** Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ où $k = f'(1)$.
   - **b.** En déduire $f(x)$ en fonction de k pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On note φ l'unique élément de $\mathcal{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi'(1) = 1$.
   - **a.** φ est-elle dérivable en 0 ?
   - **b.** Déterminer les variations et les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$ puis tracer son graphe.
4. On considère $f \in \mathcal{E}$ que l'on suppose seulement continue sur $\mathbb{R}$. On note alors F l'unique primitive de f s'annulant en 0.
   - **a.** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}(xy) = x^2\mathrm{F}(y) + \dfrac{xy^2}{2}f(x)$.
   - **b.** En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **c.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 4 ★★

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les relations suivantes

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = g$.

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = g$.

Corrigé

Solution 1

1. On a facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, $I_1 = 1$. Pour le calcul de J_1, on intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[t^2 \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2\left[t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\cos^n$ est continue, positive et non constamment nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc son intégrale sur ce segment est stritement positive i.e. $I_n > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède à nouveau à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

4. **a.** Il est évident que $t \geq 0$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour établir l'autre inégalité, il suffit d'utiliser la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le graphe de cette fonction est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ et on en déduit bien la seconde inégalité demandée.
Pour les nouvelles générations qui ignoreront tout de la convexité, on introduit la fonction $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$. f est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f'' est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annule qu'en 0 ce qui prouve la stricte décroissance de f'. On a $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$. f' étant également continue, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que f' s'annule en un unique réel α sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La décroissance de f' montre que f' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq J_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \, dt = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $I_n > 0$

$$0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n}\right)$$

Or d'après la question **3**, $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\left(\frac{J_n}{I_n}\right)$ converge vers 0.

5. **a.** On procède encore une fois à des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+2} &= \left[t\cos^{n+2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos^{n+1}t\ \mathrm{d}t \\
&= (n+2)\left[\frac{t^2}{2}\sin t\cos^{n+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\cos^{n+2}t-(n+1)\sin^2 t\cos^n t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left(\cos^{n+2}t-(n+1)(1-\cos^2 t)\cos^n t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\left((n+2)\cos^{n+2}t-(n+1)\cos^n t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(n+2)\left((n+1)\mathrm{J}_n-(n+2)\mathrm{J}_{n+2}\right)
\end{aligned}$$

b. En utilisant la question **3**

$$\frac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n}-\frac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \frac{(n+1)\mathrm{J}_n}{(n+2)\mathrm{I}_{n+2}}-\frac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \frac{(n+1)\mathrm{J}_n-(n+2)\mathrm{J}_{n+2}}{(n+2)\mathrm{I}_{n+2}}$$

Mais d'après la question précédente,

$$(n+1)\mathrm{J}_n-(n+2)\mathrm{J}_{n+2} = \frac{2\mathrm{I}_{n+2}}{n+2}$$

donc

$$\frac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{I}_n}-\frac{\mathrm{J}_{n+2}}{\mathrm{I}_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}$$

6. Soit un entier $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \\
&= 1+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{(k+2)^2} \\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\mathrm{J}_k}{\mathrm{I}_k}-\frac{\mathrm{J}_{k+2}}{\mathrm{I}_{k+2}} && \text{d'après la question précédente} \\
&= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{J}_0}{\mathrm{I}_0}+\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{J}_1}-\frac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{J}_{n-1}}-\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{J}_n}\right) && \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

En utilisant la question **4.c**, on en déduit que (S_n) converge vers $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{J}_0}{\mathrm{I}_0}+\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{I}_1}\right)+1$. En utilisant les résultats de la question **1**, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{J}_0}{\mathrm{I}_0}+\frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{I}_1}\right)+1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}}+\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{1}\right)+1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{4}-2\right)+1 = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Solution 2

1. Puisque sur I, $1-e^{-t} = e^{-t}(e^t-1) \neq 0$, l'équation homogène $(\mathbf{E_H})$ est équivalente à

$$(\mathbf{E}) : y' + \frac{e^t}{e^t-1}y = 0.$$

Comme $e^t-1>0$ sur I, on a $\int \frac{e^t}{e^t-1}dt = \ln(|e^t-1|) = \ln(e^t-1)$, les solutions de $(\mathbf{E_H})$ sur I sont les fonctions de la forme,

$$t \in \mathrm{I} \longmapsto \frac{\lambda}{e^t-1} \quad , \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Appliquons la méthode de la variation de la constante. D'après ce qui précède, les solutions de (**E**) sur I sont les fonctions de la forme $t \in \mathrm{I} \longmapsto \frac{\lambda(t)}{e^t-1}$ avec λ définie et dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \frac{\lambda'(t)}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1},$$

ie $\forall t \in \mathrm{I}, \quad \lambda'(t) = 1$, ce qui équivaut à $\forall t \in \mathrm{I}\,,\ \lambda(t) = t + \mathrm{C}$, où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme,

$$t \in \mathrm{I} \longmapsto \frac{t+\mathrm{C}}{e^t-1} \quad \text{où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

3. *Recherche d'une solution admettant une limite finie en* 0^+.

a. Posons $\phi(x) = e^x - 1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = e^x - 1$. Ainsi ϕ' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ϕ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\phi(x) \geq \phi(0) = 0$. Ainsi $e^x - 1 \geq x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
Posons $\psi(x) = e^x - 1 - xe^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = -xe^x$. Ainsi ψ' est négative sur $\mathbb{R}_+$ et ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \leq \psi(0) = 0$. Ainsi $e^x - 1 \geq xe^x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

b. D'après l'inégalité obtenue ci-dessus,

$$\forall x > 0\ ,\ e^{-x} \leq \frac{x}{e^x-1} \leq 1.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$, on obtient en appliquant le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x-1} = 1.$$

Comme les solutions de (**E**) sont de la forme

$$f_{\mathrm{C}} : \mathrm{I} \longmapsto f_{\mathrm{C}}(t) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{\mathrm{C}}{e^x-1} \quad \text{où } \mathrm{C} \in \mathbb{R},$$

f_{C} admet une limite finie en 0^+ si et seulement si $x \mapsto \frac{\mathrm{C}}{e^x-1}$ en admet également une. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$, la seule solution admettant une limite finie en 0^+ est la fonction $f = f_0 : t \in \mathrm{I} \longmapsto \frac{t}{e^t-1}$ et sa limite en 0^+ vaut $\ell = 1$.

4. **a.** La fonction f est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}.$$

D'après la question **3.a**, $f'(x) \leq 0$ sur I. La fonction est donc décroissante sur cet intervalle. D'après les croissances comparées, f tend vers 0 en $+\infty$. Comme $f(0) = \ell = 1$, la fonction f décroît de 1 à 0 sur I.

b. Posons $\chi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi'(x) = e^x - 1 - x$. D'après la question **3.a**, χ' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et χ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\chi(x) \geq \chi(0) = 0$. Ainsi $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Posons $\xi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi'(x) = e^x - 1 - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x$. D'après la question **3.a**, $e^x - 1 - xe^x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et a fortiori, $\xi'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. ξ' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et ξ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Notamment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\xi(x) \leq \xi(0) = 0$. Ainsi $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c. D'après la question **4.b**, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x + \frac{x^2}{2}e^x} \leq f(x) \leq \frac{x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

d'où, comme $f(0) = 1$,

$$\frac{-x^2e^x/2}{x + \frac{x^2}{2}e^x} \leq f(x) - f(0) \leq \frac{-x^2/2}{x + \frac{x^2}{2}}$$

puis comme $x > 0$,

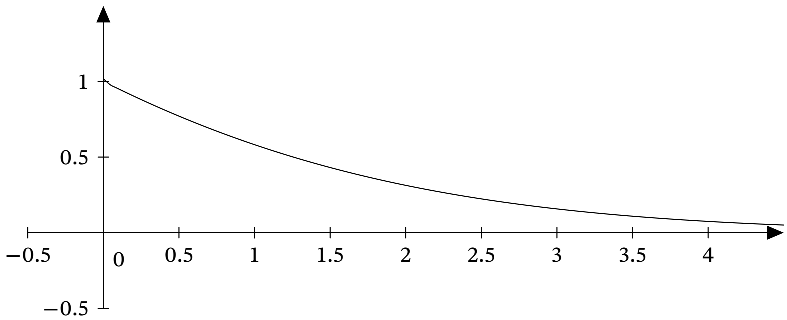
$$\frac{-e^x/2}{1+\frac{x}{2}e^x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \frac{-1/2}{1+\frac{x}{2}}.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \ , \ \lim_{x\to 0^+}(1+x/2) = \lim_{x\to 0^+}(1+xe^x/2) = 1,$$

les deux membres encadrant la valeur du taux d'accroissement de f en 0 au point x tendent vers $-\frac{1}{2}$. On déduit du théorème des gendarmes que ce taux d'accroissement tend également vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0^+ et donc que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

d. Le tracé découle de l'étude précédente.



Solution 3

---

1. **a.** En choisissant $x = y = 0$ dans la relation de l'énoncé, on obtient $f(0) = 0$. En choisissant $x = y = 1$, on obtient $f(1) = 0$. Enfin, en choisissant $x = y = -1$, on obtient $f(-1) = 0$.

   b. On se donne $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $y = -1$, on obtient $f(-x) = -f(x)$ puisque $f(-1) = 0$. f est donc bien impaire.

2. **a.** On dérive la relation de l'énoncé par rapport à y :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$$

   On fixe alors $y = 1$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf'(x) - f(x) = xf'(1)$$

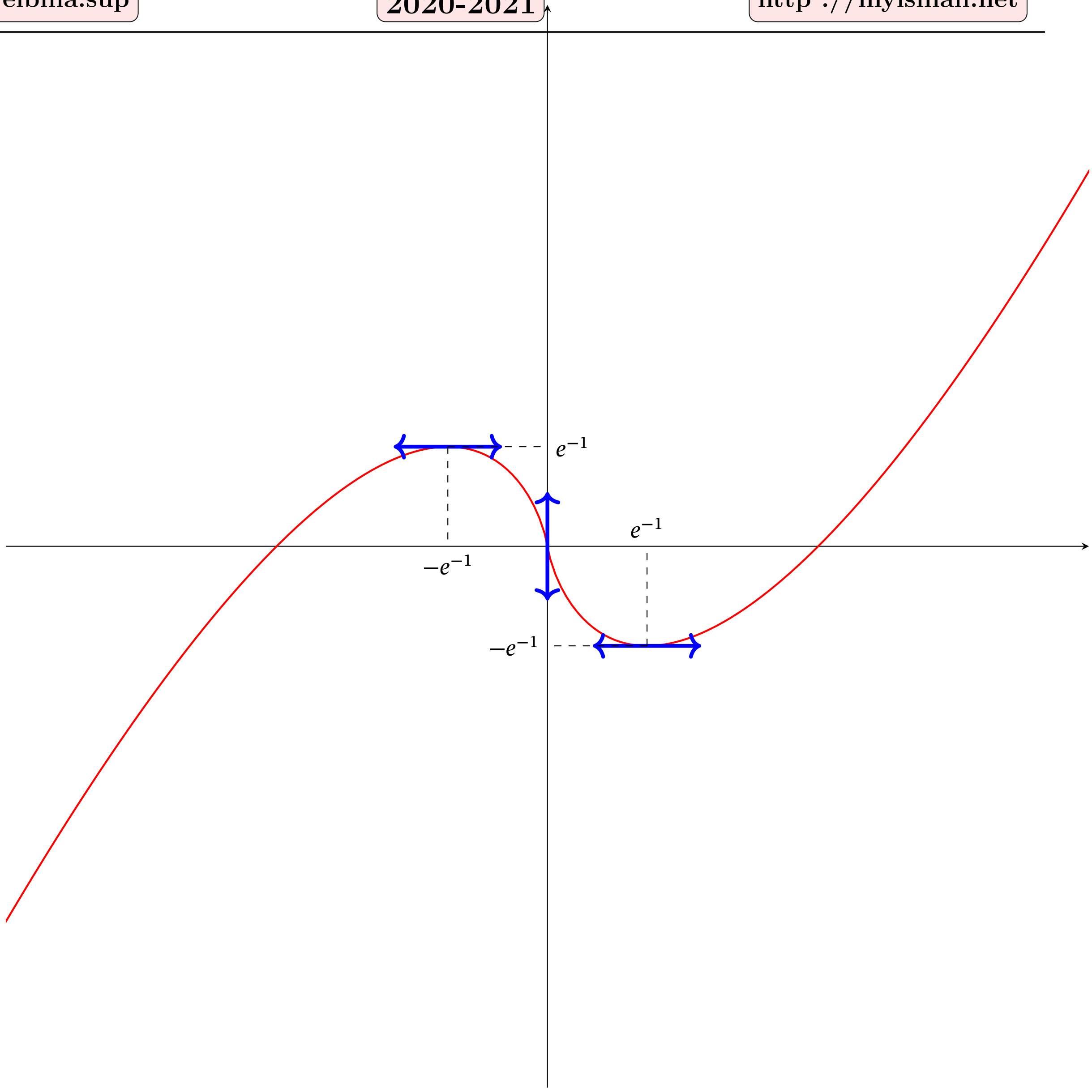
   Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' - y = kx$ avec $k = f'(1)$.

   b. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve que $x \mapsto kx\ln(x)$ est solution particulière. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x + kx\ln(x)$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x + kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or on sait que $f(1) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. On en déduit que $f(x) = kx\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x) = kx\ln(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x\to 0^+} kx\ln(x) = 0$ par croissances comparées.

3. **a.** La question précédente montre que $\varphi(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ln x$. Ainsi $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.

   Remarque. On prouve de même que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$. On peut en déduire que la courbe de f admet une tangente verticale en son point d'abscisse 0.

   b. On se contente d'étudier f sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque f est impaire. On trouve que $f'(x) = \ln(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Par opérations sur les limites, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   Puisque f est impaire, f est strictement croissante sur $[-1/e, 0[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 1/e]$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



4. **a.** Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
On fixe alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(xt) = xf(t) + tf(x)$$

On se donne maintenant $y \in \mathbb{R}$ et on intègre la relation précédente entre 0 et y. Ainsi

$$\int_0^y f(xt)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{F}(y) + \frac{y^2}{2}f(x)$$

On multiplie cette relation par x :

$$\int_0^y xf(xt)\,\mathrm{d}t = x^2\mathrm{F}(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale, on obtient

$$\mathrm{F}(xy) = x^2\mathrm{F}(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

b. En choisissant $y = 1$ dans le relation précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(\mathrm{F}(x) - x^2\mathrm{F}(1)\right)$$

Or F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive. Par opérations, f est donc elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. D'après la question **2**, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = kx\ln|x|$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (seule la continuité en 0 pose éventuellement problème mais $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$). On vérifie également que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

quitte à distinguer les cas où $x = 0$ ou $y = 0$.
On a donc démontré que $\mathcal{E} = \mathrm{vect}(\varphi)$.

Solution 4

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^b - e^{-b}}{2}\\
&= \frac{e^{a+b} - e^{b-a} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} - \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{b-a} - e^{-a-b}}{4}\\
&= \frac{e^{a-b} - e^{b-a}}{2} = \mathrm{sh}(a-b)\\
\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a - e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^b - e^{-b}}{2}\\
&= \frac{e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} - \frac{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}}{4}\\
&= \frac{e^{a-b} + e^{b-a}}{2} = \mathrm{ch}(a-b)
\end{aligned}$$

2. A l'aide de la question précédente et de la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \mathrm{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Comme sh et ch sont également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)g(x) - \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)g(x)\\
&= \int_0^x (\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

3. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On démontre comme à la première question que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. que f est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \mathrm{sh}(x)\int_0^x \mathrm{ch}(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{ch}^2(x)g(x) - \mathrm{ch}(x)\int_0^x \mathrm{sh}(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{sh}^2(x)g(x)\\
&= \int_0^x (\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t + (\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x))g(x)\\
&= f(x) + g(x)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de l'équation différentielle $y'' - y = g$.

4. Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}(x) + \mu\,\mathrm{sh}(x)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est une solution particulière de $y'' - y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' - y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda\,\mathrm{ch}(x) + \mu\,\mathrm{sh}(x)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.