

## DEVOIR SURVEILLÉ N°04

### Fonction Réelles & Usuelles Équations Différentielles

Lundi 18 Janvier 2021  
Durée : 4 heures

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

#### Exercice 1

Soit  $h$  la fonction définie par

$$h(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $h$ .
2. Justifier que  $h$  est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
3. En déduire la valeur de  $h(x)$  en fonction de la valeur de  $x$ .
4. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a. Justifier que  $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .
  - c. Démontrer que  $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - d. On pose  $T_n = \sum_{k=1}^n \arctan(2k^2)$ . Déterminer les limites des suites  $(T_n)$  et  $(T_n/n)$ .

## Exercice 2

- Énoncer le théorème de changement de variable.
  - Étant donné  $x \in ]0; 1[$ , calculer l'intégrale  $\int_{\frac{1}{4}}^x \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}}$ .  
On effectuera le changement de variable défini par  $u = \sqrt{t}$ .
  - En déduire l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  définie sur  $]0; 1[$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ .
- Déterminer une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ .
  - Étant donné  $x > 0$ , calculer l'intégrale  $\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ .  
On effectuera le changement de variable défini par  $u = \sqrt{t}$ .
- Énoncer le théorème d'intégration par partie.
- Étant donné  $x > 0$ , calculer l'intégrale  $\int_1^x \arctan(\sqrt{t}) dt$ .  
On effectuera une intégration par parties.
- Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' - \frac{y}{2t} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  sur  $]0; 1[$ .

## Problème 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ .

### Questions préliminaires : quelques résultats utiles pour la suite

- Donner les valeurs de  $\arctan(0)$ ,  $\arctan(1)$ ,  $\arctan(\sqrt{3})$ ,  $\arctan(-\sqrt{3})$ ,  $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .
- Montrer que, pour tout  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \cos(2\theta)$ .
- Pour tout  $\alpha \in ]-\pi, 0[$ , simplifier  $\arccos(\cos(\alpha))$ .
  - Simplifier l'expression  $\arccos(\cos(2\theta))$  dans les cas suivants :
    - $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ;
    - $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

### Première partie : brève étude de $f$

- Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  ainsi que son domaine de dérivabilité  $\mathcal{D}'$ .
- Étudier la parité de  $f$ .
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathcal{D}'$ ,  $f'(x) = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}$ .
- Déterminer, si elle existe, la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
Que peut-on en déduire concernant la représentation graphique de  $f$  ?

### Seconde partie : explicitation(s) de $f(x)$

- Déduire de la dérivée de  $f$  une expression simple de  $f$  sur  $\mathcal{D}$ .
- Dans la question suivante, on cherche à redémontrer le résultat précédent, en employant une autre démarche.
  - Simplifier, pour tout  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f(\tan(\theta))$ . (On pensera à utiliser les questions préliminaires)
  - Utiliser le résultat de la question 2.(a) pour retrouver, pour tout  $x \in \mathcal{D}$ , les simplifications de l'expression de  $f(x)$  vues en 1.

## Problème 2

### Partie I – Étude d’une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .
2.
  - a. Donner un équivalent de la fonction  $\operatorname{sh}$  en 0 et en déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en 0.
3. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \left( \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Montrer que pour tout  $X \in \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{th}(X) < X$ .
5. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
6. Donner le développement limité à l’ordre 4 en 0 de la fonction  $X \mapsto \frac{\operatorname{sh} X}{X}$ .
7. En déduire qu’au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ ,  $f$  admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont cinq réels que l’on précisera.

8. Montrer que la fonction  $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  se prolonge sur  $\mathbb{R}$  en une fonction continue notée  $G$ , puis prouver que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie II – Une équation différentielle

On considère l’équation différentielle (E) suivante que l’on va résoudre sur différents intervalles.

$$(E) : xy' + y = \operatorname{ch} x$$

9. Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+$ .
10. Donner sans justification les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-$ .

11. Justifier que la fonction  $G$  définie à la question I.8 est l'unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie III – Une fonction définie par une intégrale**

Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$ .

12. Déterminer la parité de  $J$ .
13. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ .
14. Justifier que  $J$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$J'(x) = f(x) \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \right)$$

15. En déduire le signe de  $J'$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On exprimera le (ou les) zéro(s) de  $J'$  à l'aide de la fonction  $\ln$ .

16. a. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{sh} t \geq t + \frac{t^3}{6}$ .
- b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, J(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}$$

puis les limites de  $J$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

17. Donner le tableau de variations de  $J$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

18. On pose  $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .

- a. Montrer que  $h$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $h$  son prolongement.
- b. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u) du$$

- c. Montrer

$$J(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

19. Montrer que la courbe de  $J$  admet en  $+\infty$  et en  $-\infty$  une asymptote oblique dont on précisera une équation. On donnera également la position de la courbe de  $J$  par rapport à cette asymptote.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $J$  sur  $\mathbb{R}$ .

On fera notamment figurer l'asymptote déterminée à la question III.19 ainsi que les tangentes horizontales éventuelles.

On donne pour le tracé  $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$  et  $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$  à  $10^{-2}$  près.

## Problème 3

### 1) Ce qu'il faut savoir comme du cours...

- Calculer  $\int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ .
- On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ .  
Montrer que  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$ .  
Exprimer  $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$  en fonction d'un certain  $W_m$  à préciser.
- Trouver, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une relation entre  $W_n$  et  $W_{n+2}$ .
- Déterminer la valeur, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de  $nW_n W_{n-1}$ .
- Déduire du c) une expression explicite (un peu impressionnante la première fois) de  $W_{2n}$  et de  $W_{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n \geq W_{n+1}$ . En déduire, en utilisant la relation du d), la limite de  $W_n$  et mieux, un équivalent de  $W_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### 2) Application de $(W_n)$ à $\binom{2n}{n}$

- Un équivalent : déduire du 1) un équivalent de  $\binom{2n}{n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- En encadrement pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  : déduire des propriétés du 1) :

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n + \frac{1}{2})}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

*Indication* – On pourra considérer le quotient  $W_{2n}/W_{2n+1}$ .

### 3) Application des $(W_n)$ à la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$ :

Le but de cette est de donner une démonstration du fait que :

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Euler 1734})$$

**N.B.** Une autre façon de résoudre ce problème est donnée dans le D.M. 7 de l'an dernier.

Dans ce problème, on notera pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt$  et ici  $\widetilde{W}_n = W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$ .

- Montrer que  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .
  - En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq V_n \leq \frac{\pi^2}{4} (\widetilde{W}_n - \widetilde{W}_{n+1})$ .
- En déduire que  $\frac{V_n}{\widetilde{W}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- A l'aide d'intégrations par parties, obtenir une relation de la forme :

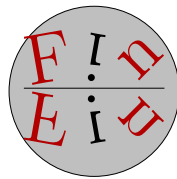
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \widetilde{W}_n = a_n V_{n-1} + b_n V_n,$$

où l'on explicitera  $a_n$  et  $b_n$ .

- d) Dédire des relations précédentes que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{V_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{V_n}{W_n} = \frac{1}{2n^2}$
- e) Démontrer alors le théorème d'Euler annoncé en introduction.

#### 4 Application de $(W_n)$ au calcul de l'intégrale de la gaussienne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

- a) A l'aide d'une majoration, justifier que  $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ . Dans la suite, on notera cette limite  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .
- b) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .  $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$ ,  $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ ,
- c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- i) Soit  $A_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ . Exprimer  $A_n$  en fonction d'une certaine intégrale de Wallis  $W_m$ .
- ii) Soit  $B_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ . Montrer que  $B_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$ .  
*Indication* - On pourra faire un changement de variable dans l'intégrale  $B_n$ .
- d) On rappelle l'équivalent de Wallis :  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . Dédire de tout ceci la valeur de l'intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .



## DEVOIR SURVEILLÉ N°04 : CORRIGÉ

### Exercice 1

- Puisque  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $h$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  et  $x \mapsto \frac{x-1}{x}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Il s'ensuit que  $h$  est également dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} - \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} + \frac{1}{x^2 + (x-1)^2} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} + \frac{(2x^2 + 2x + 1) - (2x^2 - 2x + 1)}{(2x^2 + 1)^2 - (2x)^2} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} + \frac{4x}{4x^4 + 1} = 0 \end{aligned}$$

- La question montre que  $h$  est constante sur chacun des intervalles  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .  
Puisque  $h(1) = \arctan(1/2) - \arctan(1/2) + \arctan(0) = 0$ ,  $h$  est constante égale à 0 sur  $]0, +\infty[$ .  
Puisque  $\lim_{-\infty} h = \arctan(0) - \arctan(1) + \arctan(1)$ ,  $h$  est constante égale à 0 sur  $]-\infty, -1[$ .  
Enfin, puisque  $\lim_{0^-} h = \lim_{+\infty} \arctan - \arctan(0) + \lim_{+\infty} \arctan = \pi$ ,  $h$  est constante égale à  $\pi$  sur  $]-1, 0[$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \quad \text{car } h \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) \quad \text{par télescopage} \\ &= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

**b.** Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ .

**c.** Vu en cours.

**d.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \arctan(2k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{n\pi}{2} - S_n \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$  par opérations.

Enfin,  $\frac{T_n}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{S_n}{n}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{\pi}{2}$  par opérations.

### Exercice 1

1. (a) cf cours

(b) Comme  $x \in ]0; 1[$ , l'intervalle  $[\frac{1}{4}, x]$  (ou  $[x, \frac{1}{4}]$ ) est entièrement contenu dans  $]0, 1[$ . Par conséquent, la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[x, \frac{1}{4}]$  (ou  $[\frac{1}{4}, x]$ ), et le changement de variable défini par  $u = \sqrt{t}$  « donne »  $dt = 2udu$ , et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^x \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{\sqrt{u^2-u^4}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2[\text{Arcsin}(u)]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} = 2 \left( \text{Arcsin}(\sqrt{x}) - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(c)  $f$  étant continue sur  $]0, 1[$ , d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction  $x \mapsto \int_{\frac{1}{4}}^x f(t) dt$

est une primitive de  $f$  : c'est même l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $\frac{1}{4}$ .

Par conséquent, d'après les calculs effectués dans la question précédente,  $x \mapsto 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{3}$  est une primitive de  $f$ . Plus « simplement »,  $x \mapsto 2\text{Arcsin}(\sqrt{x})$  est une primitive de  $f$ .

On en déduit que l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  est :

$$\left\{ \left[ \begin{array}{l} ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) + C \end{array} \right]; C \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Remarquons tout d'abord que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ .

Par conséquent,  $x \mapsto x - \text{Arctan}(x)$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Comme en 1.(a), le changement de variable (correctement défini) proposé permet d'écrire :

$$\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt = \int_1^x \frac{2t}{1+t} \times \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2[u - \text{Arctan}(u)]_1^{\sqrt{x}} = 2 \left( \sqrt{x} - \text{Arctan}(\sqrt{x}) - 1 + \frac{\pi}{4} \right).$$

3. cf cours

4. Considérons les deux fonctions  $u$  et  $v$  introduites ci-dessous, toutes deux de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, x]$  (ou  $[x, 1]$ ) :

$$\begin{cases} u(t) = \text{Arctan}(\sqrt{t}) & u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{cases}$$

Par une intégration par parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^x \text{Arctan}(\sqrt{t}) dt &= \left[ t \text{Arctan}(\sqrt{t}) \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt \\ &= \left( x \text{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \sqrt{x} - \text{Arctan}(\sqrt{x}) - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \\ &\hspace{15em} \text{d'après la réponse à la question 2.(b)} \\ &= (x+1) \text{Arctan}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + 1 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5. - Résolution de l'équation homogène associée ( $E_0$ ) :  $y' - \frac{y}{2t} = 0$

Puisque  $t \mapsto -\frac{\ln(t)}{2}$  est une primitive de  $t \mapsto -\frac{1}{2t}$  sur  $]0, 1[$ , les solutions de ( $E_0$ ) sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \lambda e^{+\frac{\ln(t)}{2}}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par les propriétés de  $\ln$ , l'ensemble des solutions de ( $E_0$ ) peut s'écrire :

$$\left\{ \left[ \begin{array}{l} ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda \sqrt{t} \end{array} \right] ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Détermination d'une solution particulière de ( $E$ )

On applique la méthode de variation de la constante : considérons une fonction  $\lambda : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, et posons  $f : t \mapsto \lambda(t)\sqrt{t}$ .

Cette fonction  $f$  est dérivable, et elle est solution de ( $E$ ) si et seulement si, pour tout  $t > 0$  :

$$\left( \lambda'(t)\sqrt{t} + \frac{\lambda(t)}{2\sqrt{t}} \right) - \frac{\lambda(t)\sqrt{t}}{2t} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Ainsi,  $f$  est solution de ( $E$ ) si et seulement si, pour tout  $t > 0$ ,  $\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$ .

D'après le résultat des calculs de la première question préliminaire, on voit qu'il suffit de poser, pour tout  $t > 0$ ,  $\lambda(t) = 2\text{Arcsin}(\sqrt{t})$  pour que cette condition soit vérifiée.

Ainsi, la fonction  $t \mapsto 2\text{Arcsin}(\sqrt{t})\sqrt{t}$  est une solution de ( $E$ ).

Par conséquent, l'ensemble des solutions de ( $E$ ) est :

$$\left\{ \left[ \begin{array}{l} ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (\lambda + 2\text{Arcsin}(\sqrt{t}))\sqrt{t} \end{array} \right] ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

## Problème 1

### Questions préliminaires : quelques résultats utiles pour la suite

1.  $\text{Arctan}(0) = 0$ ,  $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\text{Arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ ,  
 $\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$  et  $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ .
2. Pour tout  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} \times \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \cos(2\theta)$ .  
(c'est une formule du cours)
3. (a) Pour tout  $\alpha \in ]-\pi, 0[$ ,  $\text{Arccos}(\cos(\alpha)) = \text{Arccos}(\cos(-\alpha)) = -\alpha$  car  $-\alpha \in ]0, \pi[$ .  
(b) En posant  $\alpha = 2\theta$ , on obtient :
  - i.  $\text{Arccos}(\cos(2\theta)) = -2\theta$  si  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$  ;
  - ii.  $\text{Arccos}(\cos(2\theta)) = 2\theta$  si  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  ;

### Première partie : brève étude de $f$

1. Comme  $x \mapsto 1 + x^2 > 0$  alors  $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $x \mapsto \text{Arccos}(x)$  est définie sur  $[-1; 1]$  donc on résout  $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2$  (car  $1 + x^2 > 0$ )  $\Leftrightarrow -2 \leq 0 \leq 2x^2$ . Donc finalement,  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . Par théorème opératoire,  $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $x \mapsto \text{Arccos}(x)$  est dérivable sur  $] -1; 1[$  donc on résout  $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow -2 < 0 < 2x^2$ . Donc finalement,  $\mathcal{D}' = \mathbb{R}^*$ .
2. - L'ensemble  $\mathcal{D}$  déterminé dans la question précédente est symétrique par rapport à 0.  
- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$  :  $f(-x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x)$ .  
 $f$  est donc paire.
3. Par théorème opératoire, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)} \times \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2x}{|x|(1+x^2)} \end{aligned}$$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \text{Arccos}(-1) = \pi$ . Donc  $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = \pi$  en  $+\infty$ .

### Seconde partie : explicitation(s) de $f(x)$

1. On remarque que, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = (2\text{Arctan})'(x)$  et pour tout  $x < 0$ ,  $f'(x) = (-2\text{Arctan})'(x)$ .  
Ainsi, il existe  $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$  :  $\begin{cases} \forall x < 0, & f(x) = -2\text{Arctan}(x) + C_1 \\ \forall x > 0, & f(x) = 2\text{Arctan}(x) + C_2 \end{cases}$   
Plus précisément :
  - Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$  alors  $C_2 = 0$
  - Par parité de  $f$ , on peut en déduire  $C_1 = 0$  :
  - Remarquons enfin que les deux expressions sont vrai pour  $x = 0$  et en simplifiant, on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\text{Arctan}(|x|)$ .
2. (a)  $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f(\tan(\theta)) = \text{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\right) = \text{Arccos}(2\cos(\theta))$ . Avec les questions préliminaires
  - ▷ si  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ , alors  $f(\tan(\theta)) = -2\theta$  ;
  - ▷ si  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , alors  $f(\tan(\theta)) = 2\theta$  ;
(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $\theta = \text{Arctan}(x)$  :  $\theta$  est donc un angle compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , vérifiant  $\tan(\theta) = x$ . Ainsi,  $f(x) = f(\tan(\theta)) = 2|\theta| = 2\text{Arctan}(|x|)$  et on retrouve bien le résultat précédent.

**Problème 2 — D'après Petites Mines 2009**

**Partie I – Etude d'une fonction**

- Puisque  $\mathbb{R}^*$  est symétrique par rapport à 0 et que sh est impaire,  $f$  est paire.
- On sait que  $\text{sh } X \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ . On en déduit que  $\text{sh } \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$  puis que  $\lim_{\pm\infty} f = 1$ .
  - Puisque pour tout  $X \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sh } X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$ ,  $\text{sh } X \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2}$ . Ainsi  $\frac{\text{sh } X}{X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2X}$ . Par croissances comparées,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh } X}{X} = +\infty$ . Via le changement de variables  $X = \frac{1}{x}$ , on obtient donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .  
Par parité de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .
- Comme  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et sh est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \text{sh } \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  par composition. Ainsi  $f$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \text{sh } \frac{1}{x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ch } \frac{1}{x} = \left(\text{th } \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) \text{ch } \frac{1}{x}$$

- Soit  $g : X \mapsto \text{th } X - X$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $X \in \mathbb{R}$ ,  $g'(X) = \text{th}^2 X$ . Ainsi  $g'$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule qu'en 0 :  $g$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $g(0) = 0$ ,  $g(X) > 0$  i.e.  $\text{th } X < X$  pour tout  $X \in \mathbb{R}_+^*$ .
- On sait que ch est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et la question précédente nous apprend que  $\text{th } \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .  $f'$  est donc strictement négative sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par parité de  $f$ , on obtient le tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f$	1	$+\infty$	1

- On sait que

$$\text{sh } X \underset{X \rightarrow 0}{=} X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5)$$

On en déduit

$$\frac{\text{sh } X}{X} \underset{X \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4)$$

- En effectuant le changement de variable  $x = \frac{1}{X}$ , on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Autrement dit

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = \frac{1}{6} \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = \frac{1}{120}$$

8. D'après la question précédente,

$$g(x) = 1 + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

On en déduit que  $\lim_0 g = 1$ . Ainsi  $g$  est prolongeable par continuité en 0. Comme  $g$  est déjà continue sur  $\mathbb{R}^*$ , son prolongement  $G$  est continu sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs  $G(0) = 1$ . Or, pour  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \frac{g(x) - 1}{x} = o(1)_{x \rightarrow 0}$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = 0$  de sorte que  $G$  est dérivable en 0 (et  $G'(0) = 0$ ). Comme  $g$  est clairement dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $G$  l'est également. Finalement,  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie II – Une équation différentielle

9. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'équation différentielle (E) équivaut à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

L'équation différentielle homogène associée est

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On recherche une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

sous la forme  $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$  avec  $\lambda$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$  est solution si et seulement si  $\lambda' = \text{ch}$ . Il suffit donc de choisir  $\lambda = \text{sh}$ . Une solution particulière de

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch } x}{x}$$

est donc  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\text{sh } x}{x}$ .

Les solutions de cette équation différentielle et donc de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont donc les fonctions  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\text{sh } x + \lambda}{x}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

10. Les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions  $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{\text{sh } x + \mu}{x}$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ .

11. Soit  $y$  une fonction solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . D'après les deux questions précédentes, il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{\text{sh } x + \lambda}{x}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \frac{\text{sh } x + \mu}{x}$$

$y$  doit être dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc, a fortiori, continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en 0. Ceci impose que les limites à gauche et à droite de  $y$  en 0 doivent être finies. Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x}{x} = 1$ , ceci impose  $\lambda = \mu = 0$  et donc  $y(x) = G(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . Par ailleurs,  $y$  est dérivable en 0 donc continue en 0 donc  $y(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x}{x} = 1 = G(0)$ . Finalement,  $y = G$ .

Réciproquement,  $G$  est bien solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ . De plus, d'après la question 1.8,  $G(0) = 1$  et  $G'(0) = 0$  donc  $G$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**REMARQUE.** On aurait également pu montrer que  $G$  était de classe  $\mathcal{C}^1$  par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ . Ainsi l'identité  $xG'(x) + G(x) = \text{ch}(x)$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  aurait pu être étendue à tout  $x \in \mathbb{R}$  par continuité de  $x \mapsto xG'(x) + G(x)$  et  $\text{ch } x$  en 0.

Partie III – Une fonction définie par une intégrale

12. Fixons  $x \in \mathbb{R}^*$ . En effectuant le changement de variable  $t \mapsto -t$ , on obtient via la parité de  $f$

$$J(x) = - \int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(-t) dt = - \int_{-\frac{x}{2}}^{-x} f(t) dt = -J(-x)$$

Ainsi  $J$  est impaire.

13. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 2 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$$

14.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $J(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$ .  $F$  est dérivable en tant que primitive et  $x \mapsto F\left(\frac{x}{2}\right)$  est dérivable car  $x \mapsto \frac{x}{2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi  $J$  est dérivable comme différence de fonctions dérivables. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} J'(x) &= F'(x) - \frac{1}{2} F'\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) - \frac{x}{4} \operatorname{sh} \frac{2}{x} \\ &= f(x) - \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{1}{x} \operatorname{ch} \frac{1}{x} \quad \text{d'après la question III.13} \\ &= f(x) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

15.  $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $\operatorname{sh}$  l'est.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x} = 0 &\iff \operatorname{ch} \frac{1}{x} = 2 \\ &\iff e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} = 4 \\ &\iff X + \frac{1}{X} = 4 \quad \text{en posant } X = e^{\frac{1}{x}} \\ &\iff X^2 - 4X + 1 = 0 \\ &\iff X = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } X = 2 - \sqrt{3} \\ &\iff x = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \text{ ou } x = \frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} \end{aligned}$$

Or  $2 - \sqrt{3} < 1$  donc  $\frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} < 0$ . On en déduit que  $\varphi : x \mapsto 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{1}{x}$  ne s'annule sur  $\mathbb{R}_+^*$  qu'en  $\alpha = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $\operatorname{ch}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc la fonction  $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il vient ensuite que  $\varphi$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ainsi  $\varphi$  est strictement négative sur  $]0, \alpha[$ , nulle en  $\alpha$  et strictement positive sur  $]\alpha, +\infty[$ .

Puisque  $J' = f\varphi$ ,  $J'$  est également strictement négative sur  $]0, \alpha[$ , nulle en  $\alpha$  et strictement positive sur  $]\alpha, +\infty[$ .

16. a. Posons pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\psi(t) = \operatorname{sh} t - t - \frac{t^3}{6}$$

$\psi$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \operatorname{ch} t - 1 - \frac{t^2}{2} \\ \psi''(t) &= \operatorname{sh} t - t \psi'''(t) = \operatorname{ch} t - 1 \end{aligned}$$

Les variations de  $\operatorname{ch}$  nous enseignent que  $\psi''$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $\psi'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $\psi''(0) = 0$ ,  $\psi'$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . A nouveau,  $\psi'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  est nulle en 0 donc positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Enfin, on peut affirmer que  $\psi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  est nulle en 0 donc positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

b. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après la question précédente, pour tout  $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$ ,  $f(t) \geq 1 + \frac{1}{6t^2}$ . Par positivité de l'intégrale

$$J(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \left(1 + \frac{1}{6t^2}\right) dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = +\infty$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$  par théorème de minoration.

17. D'après les questions III.15 et III.16.b, on a le tableau de variations suivant.

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$J'(x)$		-	0
$J$	$+\infty$		$+\infty$

$J(\alpha)$

18. a. Comme  $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $h(x) = \frac{1}{6} + o(1)$ . Ainsi  $\lim_0 h = \frac{1}{6}$  et  $h$  est prolongeable par continuité en 0.

b. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Remarquons que

$$J(x) - \frac{x}{2} = \int_{\frac{x}{2}}^x (f(t) - 1) dt$$

A l'aide du changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ ,

$$J(x) - \frac{x}{2} = - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} (f(1/u) - 1) \frac{du}{u^2} = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} h(u) du$$

c. Comme  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet une primitive  $H$  sur  $\mathbb{R}$  dont on peut supposer qu'elle s'annule en 0. En «primitivant» le développement limité de  $h$  obtenu précédemment, on obtient

$$H(x) = \frac{x}{6} + o(x)$$

Par changement de variable,

$$H(1/x) = \frac{1}{6x} + o(1/x)$$

$$H(2/x) = \frac{1}{3x} + o(1/x)$$

puis

$$J(x) - \frac{x}{2} = H(2/x) - H(1/x) = \frac{1}{6x} + o(1/x)$$

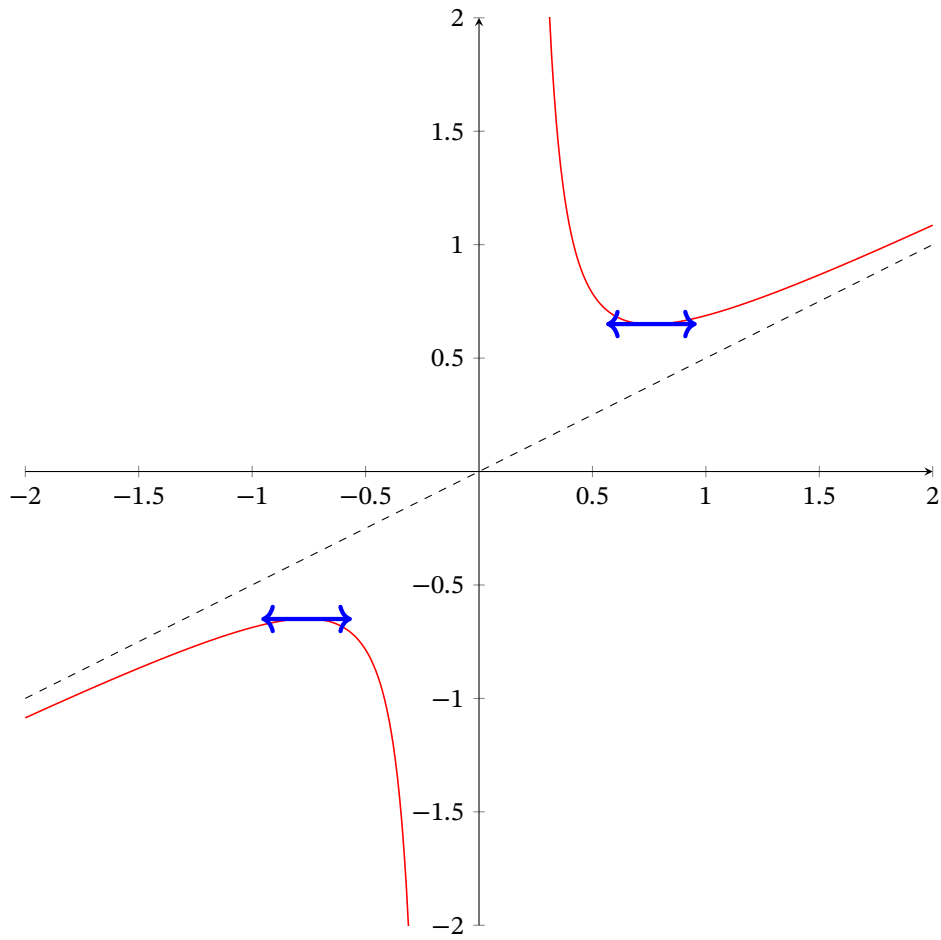
19. Puisque  $J(x) - \frac{x}{2} \sim \frac{1}{6x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) - \frac{x}{2} = 0$ . Ainsi la courbe de  $J$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = \frac{x}{2}$  en  $+\infty$ .

De plus, on a vu à la question III.16.b que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, J(x) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{6x} > \frac{x}{2}$$

Ainsi la courbe de  $J$  est-elle au-dessus de son asymptote dans le demi-plan d'équation  $x > 0$ . Comme  $J$  est impaire, la courbe de  $J$  admet cette même asymptote en  $-\infty$  mais la courbe de  $J$  est au-dessous de cette asymptote dans le demi-plan d'équation  $x < 0$ .

20.



### Problème 3

#### 1) Ce qu'il faut savoir comme du cours...

*Fait en cours.*

#### 2) Application de $(W_n)$ à $\binom{2n}{n}$

a) On a vu au 1) f) que  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . On en déduit que :

$$W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Par la formule explicite de  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2}$  donnée au 1) e), on obtient :

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

et finalement

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

b) On a vu au 1) e) les formules explicites  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \cdot \frac{\pi}{2}$  et  $W_{2n+1} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ .

$$\text{Ainsi } W_{2n}/W_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \quad (1).$$

Mais la propriété de décroissance des  $(W_n)$ , on a  $1 \leq W_{2n}/W_{2n+1} \leq W_{2n-1}/W_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n}$  (2).

Par (1) et (2) on a :

$$1 \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \leq \frac{2n+1}{2n},$$

la dernière inégalité étant la relation de récurrence du 1) c).

En isolant le terme central  $\binom{2n}{n}$  et en prenant la racine carrée, on a la conclusion :

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

**N.B.** Bien sûr cette encadrement redonne, par théorème des gendarmes, l'équivalent du a), mais il est plus précis, car du point de vue numérique par exemple, on a un contrôle sur l'erreur qu'on fait quand on remplace  $\binom{2n}{n}$  par  $4^n/\sqrt{\pi n}$  alors que l'équivalent ne donne que des calculs de limites, sans contrôle d'erreur.

#### 3) Application des $(W_n)$ à la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$ :

a) i) **M1** On pose  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \sin(t) - t$ .

Alors  $\varphi'(t) = \frac{\pi}{2} \cos(t) - 1$  et pour  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(t) \geq \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow t \leq \text{Arccos}(\frac{2}{\pi})$ , car  $\cos|_{[0, \pi/2]}$  est strictement décroissante, de bij. récip. Arccos.

En notant  $\alpha = \text{Arccos}(\frac{2}{\pi})$ , on conclut que  $\varphi$  est croissante sur  $[0, \alpha]$  et décroissante sur  $[\alpha, \pi/2]$ .

Or  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\pi/2) = 0$  donc  $\varphi \geq 0$  sur  $[0, \pi/2]$ . □

(ii) Tout dans la formule à montrer indique qu'il faut prendre le carré de la formule précédente !

Pour  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ , entraîne, par croissance de  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ , que :  $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) = \frac{\pi^2}{4} (1 - \cos^2(t))$ .

En multipliant les deux membres par  $\cos^{2n}(t)$ , on en déduit que :

$$\forall t \in [0, \pi/2], t^2 \cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} (\cos^{2n}(t) - \cos^{2n+2}(t)).$$

En intégrant :  $V_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos^{2n}(t) - \cos^{2n+2}(t)) dt = \frac{\pi^2}{4} (\widetilde{W}_n - \widetilde{W}_{n+1})$  □

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\widetilde{W}_n$  est l'intégrale d'une fonction continue positive qui n'est pas la fonction nulle donc  $\widetilde{W}_n > 0$ .

On peut donc diviser l'inégalité du a) (ii) par  $\widetilde{W}_n$ , pour obtenir :

$$0 \leq \frac{V_n}{\widetilde{W}_n} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\widetilde{W}_{n+1}}{\widetilde{W}_n}\right) \quad (*)$$

Avec la relation de récurrence des intégrales de Wallis du 1) c), on sait que :

$$\frac{\widetilde{W}_{n+1}}{\widetilde{W}_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc  $1 - \frac{\widetilde{W}_{n+1}}{\widetilde{W}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par théorème des gendarmes, l'inégalité (\*) entraîne donc bien que  $V_n/\widetilde{W}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . □

c) Dans  $\widetilde{W}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$ , I.P.P avec  $\begin{cases} u(t) = \cos^{2n}(t) \Rightarrow u'(t) = -2n \sin(t) \cos^{2n-1}(t), \\ v'(t) = 1 \Leftarrow v(t) = t. \end{cases}$

$$\text{Alors } \widetilde{W}_n = [t \cos^{2n}(t)]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt.$$

Là encore le terme de bord [ ] est nul.

$$\text{Avec une nouvelle I.P.P } \begin{cases} u(t) = \cos^{2n-1}(t) \sin(t) \Rightarrow u'(t) = -(2n-1) \cos^{2n-2}(t) \sin^2(t) + \cos^{2n}(t) \\ v'(t) = t \Leftarrow v(t) = t^2/2, \end{cases}$$

on obtient :

$$\widetilde{W}_n = 2n \left[ \frac{t^2}{2} \cos^{2n-1}(t) \sin(t) \right]_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2} ((2n-1) \cos^{2n-2}(t) \sin^2(t) - \cos^{2n}(t)) dt$$

En remplaçant  $\sin^2(t)$  par  $1 - \cos^2(t)$ , on obtient que :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_n &= n(2n-1) \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n-2}(t) (1 - \cos^2(t)) dt - n \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt, \\ &= n((2n-1)(V_{n-1} - V_n) - V_n) = n(2n-1)V_{n-1} - 2n^2V_n. \end{aligned}$$

D'où la formule de l'énoncé avec  $a_n = n(2n-1)$  et  $b_n = -2n^2$ . □

- d) On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(2n-1)\widetilde{W}_{n-1} = 2n\widetilde{W}_n$  (\*).  
Or en divisant la relation obtenue au c) par  $\widetilde{W}_{n-1}$ , on a

$$\frac{\widetilde{W}_n}{\widetilde{W}_{n-1}} = n(2n-1)\frac{V_{n-1}}{\widetilde{W}_{n-1}} - 2n^2\frac{V_n}{\widetilde{W}_{n-1}} (**)$$

En appliquant (\*) aussi bien pour la fraction dans le premier membre de (\*\*) que pour la seconde dans le second membre de (\*\*), on obtient :

$$\frac{2n-1}{2n} = n(2n-1)\frac{V_{n-1}}{\widetilde{W}_{n-1}} - n(2n-1)\frac{V_n}{\widetilde{W}_n},$$

et en divisant par  $n(2n-1)$  on a la relation demandée :

$$\frac{V_{n-1}}{\widetilde{W}_{n-1}} - \frac{V_n}{\widetilde{W}_n} = \frac{1}{2n^2}.$$

- e) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . En ajoutant toutes les égalités obtenues au d) pour  $n \in [[1, N]]$ , on obtient :

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{V_{n-1}}{\widetilde{W}_{n-1}} - \frac{V_n}{\widetilde{W}_n} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n^2} (***)$$

Notons  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ . Le membre de gauche de (\*\*\*) est une somme télescopique, et donc (\*\*\*) devient :

$$\frac{V_0}{\widetilde{W}_0} - \frac{V_N}{\widetilde{W}_N} = \frac{1}{2}S_N (\dagger)$$

Or, on a montré au b) que  $\frac{V_N}{\widetilde{W}_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . On déduit donc de (†) que  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2\frac{V_0}{\widetilde{W}_0}$ .

Or  $\widetilde{W}_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$  et  $V_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = [t^3/3]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$ .

On conclut que  $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^3/12}{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

#### 4 Application de $(W_n)$ au calcul de l'intégrale de la gaussienne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

- a) La fonction  $G$  est croissante donc pour montrer que  $G$  admet une limite finie en  $+\infty$ , il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Or pour tout  $t \geq 1$ ,  $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ , donc pour tout  $x \geq 1$ ,  $G(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq G(1) + \int_1^x e^{-t} dt = G(1) + 1 - e^{-x} \leq G(1) + 1$ . Donc  $G$  est majorée par une constante sur  $\mathbb{R}^+$  et comme elle est croissante, par théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en  $+\infty$ .

**Attention :** Pour montrer que  $\int_1^{+\infty} g(t)dt$  existe, il ne suffit pas de montrer que  $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Par exemple si  $g(t) = 1/t$ ,  $G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Autre exemple  $g(t) = 1/\sqrt{t}$ .

- b) Par convexité de  $\exp$ , comparaison avec la tangente au graphe de  $\exp$  au point d'abscisse 0, on sait que :  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$ . Pour  $x = -\frac{t^2}{n}$ , on a  $1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-t^2/n}$ .

Comme  $t \in [0, \sqrt{n}]$ ,  $0 \leq (1 - \frac{t^2}{n}) \leq e^{-t^2/n}$  et en prenant la puissance  $n$ , on a la première inégalité.

De même on a  $0 < 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{t^2/n}$  donc en prenant la puissance  $-n$ , qui est décroissante sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , on a la seconde inégalité.

- c) (i) Pour  $A_n$ , on veut faire un changement de variable tel que  $t/\sqrt{n} = \sin(u)$ .

Pour cela, on pose  $u = \arcsin(\frac{t}{\sqrt{n}})$ . Alors on a bien  $t/\sqrt{n} = \sin(u)$  et donc  $dt = \sqrt{n} \cos(u) du$ .

Alors avec ce changement de variable,  $A_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(u))^n \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u) du$ .

Donc

$$A_n = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

(ii) Pour suivre l'indication de l'énoncé, on pose  $u = \arctan(t/\sqrt{n})$ . Alors  $\tan(u) = t/\sqrt{n}$  et  $dt = \sqrt{n}(1 + \tan^2(u)) du$ .

Pour  $t = 0$ ,  $u = 0$  et pour  $t = \sqrt{n}$ ,  $u = \arctan(1) = \pi/4$ . Alors  $B_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(u))^{-n} (1 + \tan^2(u)) du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(u))^{-n+1} du$

Comme  $(1 + \tan^2(u)) = \frac{1}{\cos^2(u)}$ , on a  $B_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^2(u)^{n-1} du$ .

Comme  $\cos^2(u) \geq 0$ , l'intégrale sur  $[0, \pi/4]$  est inférieure à l'intégrale sur  $[0, \pi/2]$  d'où la conclusion :

$$B_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

- d) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En intégrant l'inégalité du b) entre 0 et  $\sqrt{n}$ , on obtient :

$$A_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq B_n.$$

Grâce au c), on en déduit que :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

Grâce à l'équivalent  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ , on sait que :

$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$  et de même  $W_{2n-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ .

Donc par théorème des gendarmes, on conclut que  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .