Concours Blanc N° 2

Polynômes & Matrices

Durée : 4 heures
Lundi 15 Mars 2021
Documents & Calculatrices Non Autorisés

Dans tout le texte, la lettre $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 1 (Du calcul matriciel) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est inversible et donner son inverse.

2. Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide du binôme de Newton.

On définit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) par

$$u_{n+1} = 2u_n + v_n, \ \ v_{n+1} = 2v_n + w_n, \ \ w_{n+1} = 2w_n$$

avec les conditions initiales $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

3. Écrire X_{n+1} en fonction de X_n et de A. En déduire X_n en fonction de X_0 et de n, puis exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2 (Un vrai-faux) Pour chaque proposition, répondre par vrai ou faux et surtout **justifier avec précision** la réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Le polynôme $P = X^{2017} + 4X^{29} - 28$ admet au moins une racine multiple dans $\mathbb{R}$.

2. Le polynôme $P = X^{2017} + 4X^{29} - 28$ admet au moins une racine réelle.

3. On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $P = 2X^3 - 6X^2 + 8X - 3$. Alors $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

4. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme non constant qui n'admet pas de racines réelles, alors P est irréductible sur $\mathbb{R}$.

5. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, la fonction polynomiale associée $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

Exercice 3 (Puissances n-ièmes d'une matrice) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, en déduire deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$ (on vérifiera que $a + b = 0$).

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

3. On pose $N = A - 2I_3$. Expliquer pourquoi on est sûr que $N^2 = 0$ sans faire le produit matriciel $N \times N$. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on écrira A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et N).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P = X^2 - 4X + 4$.

5. En déduire une autre méthode de calcul de A^n (on on écrira A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et A).

Exercice 4

On cherche à déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^t M M = I_n.$$

1 Quelques résultats préliminaires

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que la matrice ${}^t M M$ est une matrice symétrique.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique et inversible. Démontrer que A^{-1} est encore symétrique.

3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire la trace de la matrice ${}^t A A$ en fonction des coefficients de A. En déduire que si A est une matrice symétrique, on a $\mathrm{Tr}(A^2) \geqslant 0$ et qu'il y a égalité si, et seulement si, $A = 0$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe des matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = CA = I_n$. Démontrer que $A(B - C)A = 0$, en déduire que A est inversible.

2 Les conséquences

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^t M M = I_n$.

5. Déduire des résultats préliminaires que M est inversible, puis que M est symétrique. En déduire M^3.

On pose $a = \mathrm{Tr}(M)$ et $b = \mathrm{Tr}(M^2)$.

6. Exprimer en fonction de a et b les réels suivants :

$$\mathrm{Tr}\left((M - I_n)^2\right), \quad \mathrm{Tr}\left((M^2 - I_n)^2\right), \quad \mathrm{Tr}\left((M^2 - M)^2\right).$$

7. Vérifier que la somme de ces trois traces est nulle, en déduire que $M = I_n$.

1er PROBLEME : irrationalité des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$

Le but de ce problème est de déterminer pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ les nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ sont irrationnels.

On pourra utiliser librement le résultat suivant : si $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier qui n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Les trois premières parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante. La quatrième partie utilise les résultats des parties **2** et **3**.

1 Le cas $n \in [\![1, 5]\!]$

1. Donner (sans démonstration) la valeur exacte des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ pour $n \in [\![1, 4]\!]$ et préciser sans démonstration s'ils sont irrationnels.

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$. On veut déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5}$. On pose aussi $\beta = \cos\frac{4\pi}{5}$.

2. Donner la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. On note Q le quotient de la division euclidienne de P par $X - 1$. Vérifier que $Q = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$, puis donner une expression de Q à l'aide de α et β. En déduire que

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{-1}{4}$$

4. Déterminer enfin la valeur de α, en déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ est irrationnel.

2 Un résultat clef

5. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme à coefficients entiers, unitaire (son coefficient dominant vaut 1). Soit $r = \frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P avec p et q des entiers premiers entre eux.

Justifier que l'entier q divise p^n, en déduire que r est nécessairement un entier.

6. En déduire à l'aide d'un polynôme bien choisi le résultat rappelé au début : si d est un entier qui n'est pas le carré d'un autre entier, alors le nombre $\sqrt{d}$ est irrationnel.

3 Une famille de polynômes

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P(\cos\theta).$$

On pourra développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

8. Démontrer l'unicité du polynôme vérifiant la relation ci-dessus.

On notera désormais T_n ce polynôme. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$ (on pourra calculer $f_{n+2}(x) + f_n(x)$). En déduire avec soin que

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

4 Irrationalité des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ à l'aide des polynômes de Tchebychev

Le but de cette partie est de démontrer que les nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ sont irrationnels pour tout entier $n \geqslant 4$.

10. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme Q_n à coefficients entiers, de degré n et unitaire (c'est-à-dire que le coefficient dominant vaut 1) tel que

$$2(T_n(X) + 1) = Q_n(2X).$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si $\cos\frac{\pi}{n}$ est rationnel, alors $2\cos\frac{\pi}{n}$ est un entier puis conclure.

2ème Problème Calcul de zeta(2)

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(s_n)_n$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On note cotan la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Si $x \in]0, \pi[$, on note aussi $\operatorname{cotan}^2(x) = (\operatorname{cotan}(x))^2$.

I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Déterminer le degré de P et préciser son coefficient dominant.
2. Démontrer que les racines complexes de P sont les nombres

$$\gamma_k = -i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

3. Justifier que la fonction cotan est injective sur $]0, \pi[$. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}$, préciser son écriture sous forme factorisée.

On considère les deux fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant n-1} \gamma_p \gamma_q$$

qui sont respectivement la somme des racines de P et la somme des produits de 2 racines distinctes de P (sans répétition).

4. À l'aide des relations coefficients/racines, donner la valeur de σ_1 et σ_2.
5. Déterminer une relation entre $\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2$ et σ_1 et σ_2.
6. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

II. Application

Soit $p \geqslant 1$.

7. En utilisant que $\forall x \in]0, \pi[,\ \operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan}(x)$, démontrer que
$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

8. Déduire de la formule précédente l'égalité suivante
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

9. On admet que pour tout réel $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin\phi < \phi < \tan\phi$. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, on a
$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$

10. En déduire la limite de la suite (s_n).

Fin

Le CorrigE

Exercice 1 (Du calcul matriciel) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est inversible et donner son inverse.

A est inversible car triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls. Pour déterminer A^{-1}, on résoud le système linéaire $AX = b$ avec $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et $b = {}^t(b_1, b_2, b_3)$. On trouve après calcul

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide du binôme de Newton.

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0.$$

On a $A^n = (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k$ par la formule du binôme de Newton, dont l'utilisation est licite puisque $2I_3$ et N commutent. Puisque $\forall k \geqslant 3, N^k = 0$, on a (la formule reste valable pour $n = 1$ et $n = 2$)

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2,$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On définit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) par

$$u_{n+1} = 2u_n + v_n,\ v_{n+1} = 2v_n + w_n,\ w_{n+1} = 2w_n$$

avec les conditions initiales $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

3. Écrire X_{n+1} en fonction de X_n et de A. En déduire X_n en fonction de X_0 et de n, puis exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

On a $X_{n+1} = AX_n$. La suite (X_n) est donc une suite géométrique de matrices de raison A, on en déduit par récurrence immédiate que $X_n = A^n X_0$.

On obtient alors
$$\begin{cases} u_n &= 2^n + n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ v_n &= (n+1)2^n \\ w_n &= 2^{n+1} \end{cases}.$$

Exercice 2 (Un vrai-faux) Pour chaque proposition, répondre par vrai ou faux et surtout **justifier avec précision** la réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Le polynôme $P = X^{2017} + 4X^{29} - 28$ admet au moins une racine multiple dans $\mathbb{R}$.

FAUX : si P admet une racine multiple $a \in \mathbb{R}$, alors $P(a) = 0$. Mais $P' = 2017X^{2016} + 4 \times 29X^{28}$ et donc $P'(a) > 0$ comme somme de réels strictement positifs.

2. Le polynôme $P = X^{2017} + 4X^{29} - 28$ admet au moins une racine réelle.

VRAI : On note encore $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée. Comme $P(x)$ est équivalent à x^{2017} en $\pm\infty$, les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$ valent respectivement $+\infty$ et $-\infty$. On en déduit que P change de signe sur $\mathbb{R}$ et comme elle est continue, elle s'annule d'après le TVI.

3. On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes de $P = 2X^3 - 6X^2 + 8X - 3$. Alors $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

VRAI : On a $P = 2(X^3 - 3X^2 + 4X - \frac{3}{2}) = 2(X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3)$ avec $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$ et $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. On a alors $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 4$.

Or
$$\sigma_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Ainsi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9 - 8 = 1$.

4. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme non constant qui n'admet pas de racines réelles, alors P est irréductible sur $\mathbb{R}$.

FAUX : $P = (X^2+1)^2$ n'a pas de racines réelles, mais est réductible car divisible par X^2+1.

5. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, la fonction polynomiale associée $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

VRAI : Soit $a \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = a$. Cela revient à chercher z tel que $P(z) - a = 0$. Or le polynôme $Q = P - a$ n'est pas constant, donc d'après D'Alembert-Gauss admet une racine b. Ainsi $Q(b) = 0$ et donc $P(b) - a = 0$. Ainsi a admet bien un antécédent b par P.

I Exercices

Exercice 1 (Puissances n-ièmes d'une matrice) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, en déduire deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$ (on vérifiera que $a + b = 0$).

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -12 \\ 8 & 12 & -24 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que $A^2 - 4A = -4I_3$, donc $A^2 = 4A - 4I_3$.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Ainsi

$$A\left(\frac{4I_3 - A}{4}\right) = \left(\frac{4I_3 - A}{4}\right) A = I_3.$$

La matrice A est donc inversible et :

$$A^{-1} = \frac{4I_3 - A}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $N = A - 2I_3$. Expliquer pourquoi on est sûr que $N^2 = 0$ sans faire le produit matriciel $N \times N$. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on écrira A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et N).

On a vu que le polynôme $P = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ est annulateur de A, donc $P(A) = (A - 2I_3)^2 = 0$, donc $N^2 = 0$.

Ainsi N est nilpotente et pour $k \geqslant 2$, on a $N^k = 0$. Puisque N et $2I_3$ commutent, on a par le binôme de Newton,

$$A^n = (2I_3 + N)^n = (2I_3)^n + n(2I_3)^{n-1}N = 2^n I_3 + n2^{n-1}N.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $P = X^2 - 4X + 4$.

Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par P. On a alors :

$$(\star) \quad X^n = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg P = 2.$$

Ainsi R est de la forme $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On évalue $(\star)$ en 2 qui est une racine de P, on a donc $2^n = 2a + b$.

Comme 2 est racine double de P, 2 est aussi racine de P', on va donc dériver $(\star)$ puis évaluer en 2 :

$$nX^{n-1} = P'Q + PQ' + a.$$

D'où $n2^{n-1} = a$, puis $b = 2^n - 2a = 2^n - n2^n = (1-n)2^n$.

Conclusion : $R = n2^{n-1}X + (1-n)2^n$.

5. En déduire une autre méthode de calcul de A^n (on on écrira A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et A).

Comme P est un polynôme annulateur de A, on évalue $(\star)$ en A, on obtient $A^n = \underbrace{P(A)}_{0}Q(A) + R(A)$, et donc :

$$A^n = aA + bI_3 = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3.$$

II Un problème pour terminer : une équation matricielle

On cherche à déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^t MM = I_n.$$

1 Quelques résultats préliminaires

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que la matrice ${}^tMM$ est une matrice symétrique. Il suffit de montrer qu'elle est égale à sa transposée :

$$^t({}^tMM) = {}^tM^t({}^tM) = {}^tMM.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Démontrer que $\mathrm{Tr}(A^2) \geqslant 0$ et qu'il y a égalité si, et seulement si, $A = 0$.

Pour tout i et j dans $[\![1, n]\!]$, le coefficient d'indice (i, j) de A^2 est :

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}(A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}.$$

La dernière égalité provient du fait que A est symétrique.

On a donc

$$\operatorname{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

De plus une somme de termes positifs ou nuls est nulle si, et seulement si, chaque terme de la somme est nul. On en déduit que

$$\operatorname{Tr}(A^2) = 0 \iff (\forall i, k \in [\![1, n]\!], a_{ik}^2 = 0) \iff (\forall i, k \in [\![1, n]\!], a_{ik} = 0) \iff A = 0.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique et inversible. Démontrer que A^{-1} est encore symétrique.

On sait que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, d'où en transposant, comme ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA$ et ${}^tI_n = I_n$, on a :

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = I_n \iff {}^t(A^{-1})A = A{}^t(A^{-1}) = I_n$$

La dernière égalité provient du fait ${}^tA = A$ puisque que A est symétrique. Elle montre que ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de A, donc par unicité de l'inverse que ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$ et donc que A^{-1} est symétrique.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe des matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = CA = I_n$. Démontrer que $A(B - C)A = 0$, en déduire que A est inversible.

On a

$$A(B - C)A = A(BA - CA) = A(BA) - A(CA) = (AB)A - A(CA) = I_nA - AI_n = 0.$$

On en déduit en multipliant par C à gauche que $\underbrace{CA}_{I_n}(B-C)A = C0 = 0$, donc $(B-C)A = 0$, puis en multipliant par B à droite que $(B - C)\underbrace{AB}_{I_n} = 0B = 0$, ce qui donne bien $B - C = 0$, donc $B = C$ et par suite A est inversible.

2 Les conséquences

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M{}^tMM = I_n.$$

5. Déduire des résultats préliminaires que M est inversible, puis que M est symétrique. En déduire M^3.

Comme $M{}^tMM = I_n$, on a $M({}^tMM) = I_n$ et $(M{}^tM)M = I_n$, ce qui montre d'après la question précédente 4 que M est inversible et que son inverse est $S = {}^tMM$. Cette matrice S est symétrique d'après **??**, donc son inverse qui est M est encore symétrique d'après la question 3. On a donc ${}^tM = M$ et donc l'équation $M{}^tMM = I_n$ devient $M^3 = I_n$.

On pose $a = \operatorname{Tr}(M)$ et $b = \operatorname{Tr}(M^2)$.

6. Exprimer en fonction de a et b les réels suivants :

$$\operatorname{Tr}\left((M-I_n)^2\right),\quad \operatorname{Tr}\left((M^2-I_n)^2\right),\quad \operatorname{Tr}\left((M^2-M)^2\right).$$

Les matrices M et I_n commutent, on a donc par le binôme de Newton (fameuse identité remarquable du collège), puis en utilisant la linéarité de la trace que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left((M-I_n)^2\right) &= \operatorname{Tr}(M^2+I_n^2-2M)=\operatorname{Tr}(M^2)+\operatorname{Tr}(I_n)-2\operatorname{Tr}(M)\\ &= b+n-2a\end{aligned}$$

De même M^2 et I_n commutent, et en remarquant que $M^4=M^3\times M=I_nM=M$, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left((M^2-I_n)^2\right) &= \operatorname{Tr}(M^4+I_n^2-2M^2)=\operatorname{Tr}(M)+\operatorname{Tr}(I_n)-2\operatorname{Tr}(M^2)\\ &= a+n-2b \quad (2)\end{aligned}$$

Enfin M^2 commute avec M (M^2 est un polynôme en M), donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left((M^2-M)^2\right) &= \operatorname{Tr}(M^4+M^2-2M^3)=\operatorname{Tr}(M)+\operatorname{Tr}(M^2)-2\operatorname{Tr}(I_3)\\ &= a+b-2n \quad (3)\end{aligned}$$

7. Calculer la somme de ces trois traces, en déduire que $M=I_n$.

En faisant la somme des trois traces, on obtient $(b+n-2a)+(a+n-2b)+(a+b-2n)=0$.

On remarque ensuite que la matrice $M-I_n$ est symétrique comme combinaison linéaire de matrices symétriques. Ainsi d'après la question 2, $\operatorname{Tr}\left((M-I_n)^2)\right)\geqslant 0$.

La matrice M^2 est aussi symétrique car M est symétrique. En effet, $M^2={}^tMM$ qui est symétrique (on a fait la preuve ci-dessus), donc M^2-I_n est aussi symétrique et donc $\operatorname{Tr}\left((M^2-I_n)^2\right)\geqslant 0$,

Enfin, M^2-M est symétrique et $\operatorname{Tr}\left((M^2-M)^2\right)\geqslant 0$.

La somme de ces trois traces est nulle, et chacune de ces traces est positive ou nulle, donc chacune de ces traces est nulle.

On a donc par exemple $\operatorname{Tr}\left((M-I_n)^2\right)=0$ et donc d'après le cas d'égalité de la question 2, on a $M-I_n=0$, d'où $M=I_n$. Réciproquement I_n est bien solution.

II PROBLEME : irrationalité des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$

Le but de ce problème est de déterminer pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ les nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ sont irrationnels.

On pourra utiliser librement le résultat suivant : si $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier qui n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Les trois premières parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante. La quatrième partie utilise les résultats des parties **2** et **3**.

1 Le cas $n \in [\![1,5]\!]$

1. Donner (sans démonstration) la valeur exacte des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ pour $n \in [\![1,4]\!]$ et préciser sans démonstration s'ils sont irrationnels. On a

$$\cos\frac{\pi}{1} = -1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour $n \in [\![1,3]\!]$, $\cos\frac{\pi}{n}$ est rationnel.

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$. On veut déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5}$. On pose aussi $\beta = \cos\frac{4\pi}{5}$.

2. Donner la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Les racines complexes de P sont les racines cinquièmes de l'unité, c'est à dire

$$1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}}, \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}}.$$

De plus $\mathrm{e}^{\frac{i6\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{-i4\pi}{5}}$ et $\mathrm{e}^{\frac{i8\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{-i2\pi}{5}}$. Ainsi on a

$$P = (X-1)(X - \mathrm{e}^{\frac{i2\pi}{5}})(X - \mathrm{e}^{\frac{-2i\pi}{5}})(X - \mathrm{e}^{\frac{i4\pi}{5}})(X - \mathrm{e}^{\frac{-i4\pi}{5}}).$$

Comme pour $\theta \in \mathbb{R}$, $(X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$, on en déduit

$$P = (X-1)(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1).$$

3. OOn note Q le quotient de la division euclidienne de P par $X-1$. Vérifier que $Q = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$, puis donner une expression de Q à l'aide de α et β. En déduire que

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{-1}{4}$$

En faisant la division euclidienne de P par $X-1$, on a $Q = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. De plus, en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de P, on a aussi
$Q = (X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1) = (X^2 - \alpha X + 1)(X^2 - \beta X + 1)$.

Or en développant,

$$(X^2-2\alpha X+1)(X^2-2\beta X+1)=X^4-2(\alpha+\beta)X^3+X^2(2+4\alpha\beta)-2(\alpha+\beta)X+1.$$

En identifiant les deux expressions de A, on a donc

$$\alpha+\beta=\frac{-1}{2}\quad\text{et}\quad\alpha\beta=\frac{-1}{4}.$$

4. Déterminer enfin la valeur de α, en déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ est irrationnel.

Les nombres α et β sont donc racines du polynôme

$$X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta=X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(4X^2+2X-1).$$

Les racines de ce trinôme sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos\frac{2\pi}{5}>\cos\frac{4\pi}{5}$, on en déduit que

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Cela montre que $\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}$ est irrationnel. En effet, sinon $\sqrt{5}=4\alpha+1$ serait rationnel, ce qui est faux.

Montrons que $\cos\frac{\pi}{5}$ est aussi irrationnel. Sinon, par la formule de duplication, $\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1$ est rationnel comme somme et produit de rationnels. Contradiction.

2 Un résultat clef

5. Soit $P=a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n$ un polynôme à coefficients entiers, unitaire (son coefficient dominant vaut 1). Soit $r=\frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P avec p et q des entiers premiers entre eux.

Justifier que l'entier q divise p^n, en déduire que r est nécessairement un entier.

Comme P s'annule en $\frac{p}{q}$. On a alors $a_0+a_1\frac{p}{q}+a_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+a_n\frac{p^n}{q^n}=0$ et donc en multipliant par q^n, on a

$$a_0q^n+a_1pq^{n-1}+a_2p^2q^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}q+a_np^n=0.$$

En particulier

$$\begin{aligned}a_np^n &= -(a_0q^n+a_1pq^{n-1}+a_2p^2q^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}q)\\ &= -q(a_0q^{n-1}+a_1pq^{n-2}+a_2p^2q^{n-3}+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}).\end{aligned}$$

L'entier q divise donc a_np^n. Comme p et q sont premiers entre eux, q est premier avec p^n, on en déduit par le théorème de Gauss que q divise a_n. P étant unitaire, $a_n=1$, donc $q=\pm1$ et donc $r=\pm p$ est un entier.

6. En déduire à l'aide d'un polynôme bien choisi le résultat rappelé au début : si d est un entier qui n'est pas le carré d'un autre entier, alors le nombre $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Le polynôme $P=X^2-d$ est unitaire. S'il admet une racines rationnelle a, alors elle est entière et alors $P(a)=0$ et donc il existe un entier a tel que $a^2=d$, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi P n'admet pas de racines rationnelles. Comme $\sqrt{d}$ est une racine de P, on en déduit que $\sqrt{d}$ n'est pas rationnel.

3 Une famille de polynômes

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P(\cos\theta).$$

On pourra développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

Le nombre $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$. On va développer par la formule du binôme de Newton et distinguer les termes d'indice pair et impairs de la somme en remarquant que $i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = i(-1)^p$.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}\times i^k(\sin\theta)^k \\ &= \sum_{k=0,k=2p}^{n}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}\times(-1)^p(\sin\theta)^{2p} \\ &\quad +i\sum_{k=0,k=2p+1}^{n}\binom{n}{2p+1}(\cos\theta)^{n-(2p+1)}\times(-1)^p(\sin\theta)^{2p+1}\end{aligned}$$

Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$ et $n = 2p$ alors $0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}$ et $0 \leqslant p \leqslant E(\frac{n}{2})$ puisque p est un entier.

Ainsi, en prenant la partie réelle, on a

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(-1)^p(\sin^2\theta)^p \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(-1)^p(1-\cos^2\theta)^p \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(\cos^2\theta-1)^p.\end{aligned}$$

Le polynôme

$$P = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}X^{n-2p}(X^2-1)^p$$

est bien à coefficients réels et vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = P(\cos\theta).$$

8. Démontrer l'unicité du polynôme vérifiant la relation ci-dessus.

Soit Q un autre polynôme vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = Q(\cos\theta).$$

On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}, P(\cos\theta) = Q(\cos\theta)$ donc $(P-Q)(\cos\theta) = 0$. Or lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\cos\theta$ décrit $[-1,1]$. Le polynôme $P-Q$ s'annule donc sur l'intervalle $[-1,1]$, en particulier il s'annule une infinité de fois, il est donc le polynôme nul et donc $P = Q$, d'où l'unicité.

On notera désormais T_n ce polynôme. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$ (on pourra calculer $f_{n+2}(x) + f_n(x)$). En déduire avec soin que

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $x \in [-1, 1]$. La formule de trigonométrie $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b$ avec $a = (n + 1) \arccos x$ et $b = \arccos x$ donne :

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \cos((n + 2) \arccos x) + \cos(n \arccos x) \\
&= \cos((n + 1) \arccos x + \arccos x) + \cos((n + 1) \arccos x - \arccos x) \\
&= 2\cos((n + 1) \arccos x) \cos(\arccos x) \\
&= 2f_{n+1}(x) \times x
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

Remarquons maintenant que pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = f_n(x)$. En effet, comme la fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et donc $\theta = \arccos x$. Puisque $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ on en déduit que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = f_n(x).$$

On pose $Q = T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. D'après la relation de récurrence ci-dessus, le polynôme Q s'annule sur $[-1, 1]$ donc une infinité de fois, il est donc le polynôme nul. Ainsi on a bien

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

4 Irrationalité des nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ à l'aide des polynômes de Tchebychev

Le but de cette partie est de démontrer que les nombres $\cos\frac{\pi}{n}$ sont irrationnels pour tout entier $n \geqslant 4$.

10. Démontrer par récurrence double que pour tout entier $n \geqslant 1$, $HR(n)$: il existe un polynôme Q_n à coefficients entiers, unitaire (c'est-à-dire que le coefficient dominant vaut 1) tel que

$$2(T_n(X) + 1) = Q_n(2X).$$

▷ $HR(1)$ est vraie car $2(T_1 + 1) = 2(X + 1) = 2X + 2 = Q_1(2X)$ avec $Q_1(Y) = Y + 2$.

▷ $HR(2)$ est vraie car $2(T_2+1) = 2(2X^2-1+1) = (2X)^2 = Q_2(2X)$ avec $Q_2(Y) = Y^2$.

▷ Soit $n \geqslant 2$ tel que Supposons $HR(n)$ et $HR(n-1)$ sont vraies. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev, on a

$$\begin{aligned} 2(T_{n+1}+1) &= 2(2XT_n - T_{n-1}+1) \\ &= 4XT_n - 2T_{n-1} + 2 \\ &= 2X \times 2(T_n+1) - 4X - 2(T_{n-1}+1) + 4 \\ &= 2X \times Q_n(2X) - Q_{n-1}(2X) - 2 \times (2X) + 4 \\ &= Q_{n+1}(2X) \end{aligned}$$

avec

$$Q_{n+1}(Y) = YQ_n(Y) - Q_{n-1} - 2Y + 4.$$

Puisque $\deg Q_n = n$ et $\deg Q_{n-1} = n-1$ et que Q_n est unitaire, le terme de plus haut degré de Q_{n+1} vaut X^{n+1}. Enfin comme Q_n et Q_{n-1} sont à coefficients entiers, il en est de même pour Q_{n+1}, ce qui prouve $HR(n+1)$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si $\cos\frac{\pi}{n}$ est rationnel, alors $2\cos\frac{\pi}{n}$ est un entier puis conclure.

On remarque que $\cos\frac{\pi}{n}$ est racine de T_n+1 donc $a = 2\cos\frac{\pi}{n}$ est racine de Q_n à coefficients entiers et unitaire.

Le cas $n=1$ est réglé puisque $\cos\pi = -1$. Supposons que $\cos\frac{\pi}{n}$ est rationnel et $n \geqslant 2$. Alors a étant rationnel, par la question précédente, a est nécessairement un entier. Mais a est borné par 2 et pour $n \geqslant 2$, $a \geqslant 0$. Donc $a \in \{0,1,2\}$.

Calcul de zeta(2)

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(s_n)_n$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On note cotan la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Si $x \in]0, \pi[$, on note aussi $\operatorname{cotan}^2(x) = (\operatorname{cotan}(x))^2$.

I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Par le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-(-1)^k) X^{n-k} \\
&= = \binom{n}{0} \times 0 \times X^n + \binom{n}{1} 2X^{n-1} + \text{termes de degré} < n-1 \\
P &= = 2nX^{n-1} + \text{termes de degré} < n-1
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\boxed{P \text{ est de degré } n-1 \text{ et son coefficient dominant vaut } 2n}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque déjà que 1 n'est pas racine de P car $P(1) = 2^n \neq 0$. On peut donc supposer $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
P(z)=0 &\Leftrightarrow (z+1)^n=(z-1)^n\\
&\Leftrightarrow \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1\\
&\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1)}=\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}},\quad k\in\{0,\dots,n-1\}\\
&\Leftrightarrow z+1=(z-1)\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}},\quad k\in\{0,\dots,n-1\}\\
&\Leftrightarrow z(1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}})=-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}-1,\quad k\in\{0,\dots,n-1\}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{n}}},\quad k\in\{\mathbf{1},\dots,n-1\}\quad\text{ou}\quad(k=0\quad\text{et}\quad 0=-2)\\
&\Leftrightarrow z=-\frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\right)},\quad k\in\{\mathbf{1},\dots,n-1\}\\
&\Leftrightarrow z=-\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}},\quad k\in\{\mathbf{1},\dots,n-1\}\\
&\Leftrightarrow z=-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\quad k\in\{1,\dots,n-1\}
\end{aligned}$$

Les racines complexes de P sont donc les nombres

$$\boxed{\gamma_k=-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\quad k\in\{1,\dots,n-1\}}.$$

3. Justifier que la fonction cotan est injective sur $]0,\pi[$. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}$, préciser son écriture sous forme factorisée.

   La fonction cotan est dérivable sur $]0,\pi[$ (quotient) et on a pour $x\in]0,\pi[$:

   $$\mathrm{cotan}'(x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2}=\frac{-1}{\sin^2 x}<0.$$

   Donc cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ et donc injective.

   Comme pour $k\in\{1,\dots,n-1\}$ les nombres $\frac{k\pi}{n}$ sont deux-à deux distincts dans $]0,\pi[$, par injectivité de cotan, les nombres γ_k sont donc aussi 2 à 2 distincts. On a donc trouvé $n-1$ racines à P. Comme il est de degré $n-1$, on les a toutes.

   Ainsi

   $$P=2n\prod_{k=1}^{n-1}\left((X+i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

On considère les deux fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\quad\text{et}\quad\sigma_2=\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n-1}\gamma_p\gamma_q.$$

qui sont respectivement la somme des racines de P et la somme des produits de 2 racines distinctes de P (sans répétition).

4. Si l'on utilise le développement de P obtenue à la première question, on a

$$P = 2nX^{n-1} + \binom{n}{3}2X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3.$$

Or $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{(n-3)!3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!6} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.
Comme $2n$ est le coefficient dominant, on a donc

$$\begin{aligned} P &= 2n\left(X^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3\right) \\ &= 2n\left(X^{n-1} - \sigma_1 X^{n-2} + \sigma_2 X^{n-3} + \text{termes de degré} < n-3\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{6}}.$$

5. Le carré d'une somme est la somme des carrés plus tous les doubles produits. Ainsi

$$\sigma_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^2 + 2\sum_{1\leqslant p<q\leqslant n-1}\gamma_p\gamma_q.$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2}.$$

6. Or

$$\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^2 = -\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sigma_2 - \sigma_1^2 = 2\sigma_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

II. Application

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

7. On pose $n = 2p+1$, alors d'après la question précédente on a

$$\sum_{k=1}^{2p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{2p(2p-1)}{3}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)+\sum_{k=p+1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
\sum_{k=1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)+\sum_{k=p+1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\pi-\frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
\sum_{k=1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)+\sum_{k=p+1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{\pi(2p+1-k)}{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

Or quand k décrit $\{p+1,\dots,2p\}$, $2p+1-k$ décrit $\{1,\dots,p\}$, donc par changement de compteur dans la somme en posant $i=2p+1-k$, on a

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{\pi(2p+1-k)}{2p+1}\right)=\sum_{i=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{\pi\times i}{2p+1}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{2p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)=2\sum_{i=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{\pi\times i}{2p+1}\right).$$

En particulier

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)=\frac{p(2p-1)}{3}}.$$

8. Pour $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}=\text{cotan}^2 x+1$ donc

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}=\frac{p(2p-1)}{3}+p=\frac{p(2p-1+3)}{3}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}=\frac{2p(p+1)}{3}.$$

9. Pour k entre 1 et p, on utilise l'inégalité précédente pour $\phi=\dfrac{k\pi}{2p+1}\in]0;\frac{\pi}{2}[$:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\frac{k\pi}{2p+1}<\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

Tout est positif donc on peut composer avec la fonction $t\mapsto 1/t^2$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}<\frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2}<\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

Pour $\phi \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{1}{\tan\phi} = \text{cotan}\phi$ donc, si on somme alors pour k allant de 1 à p en utilisant les formules des questions 5.a et 5.b, on obtient :

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$

10. On divise par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2}$:

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < s_p < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p\to+\infty}\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \lim_{p\to+\infty}\frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc, d'après le théorème des gendarmes

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} s_p = \frac{\pi^2}{6}$ soit $\boxed{S = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

Fin