Simulation DS N° 7

Algèbre Linéaire

Polynômes, EV & Matrices

Exercice 1 — On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \longmapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Ecrire la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. A l'aide de la question précédente, calculer $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

4. Déterminer le rang de f. Préciser l'image de f.

5. Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.

6. Etablir que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Im} f \bigoplus \ker f$.

7. Diagonalisation de f.

a. Calculer $f(X-4)$.

b. Etablir qu'il existe un unique polynôme unitaire Q de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.

Etablir de même qu'il existe un unique polynôme unitaire $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

c. On considère la famille $B' = \{1, X-4, Q, R\}$.

Démontrer que la famille B' est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

d. Ecrire la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B'.

e. Etablir qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que : $D = P^{-1}MP$. *(on ne demande pas de calculer P^{-1}).*

8. Dans cette question, on note encore $D = M_{B'}(f)$ et $M = M_B(f)$ les matrices introduites précédemment, et I_4 la matrice identité de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on note U le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)$.

a. Calculer : $\quad U(D) = D\,(D+\mathrm{I}_4)\,(D+2\mathrm{I}_4)\,(D+3\mathrm{I}_4)$.

b. Si λ désigne un réel quelconque, que vaut $P(D+\lambda\mathrm{I}_4)P^{-1}$?

c. En déduire : $\quad U(M) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

d. Soit n un entier naturel non nul. Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

e. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Montrer que l'application linéaire $\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}_N[X] & \longrightarrow & \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & P(M)\end{array}$ est de rang 4.

Exercice 2 — Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(\star) \qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si a est une racine de P, alors $z_1 = (a+1)^2 - 1$ et $z_2 = (a-1)^2 - 1$ sont aussi des racines de P.

2. Soit a_0 un nombre complexe. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

a. Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, alors le nombre complexe a_n est racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

c. En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

d. Montrer que -1 n'est pas racine de P.

e. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P, alors : $|a+1| = 1$.

Par la suite, on admettra que l'on a aussi : $|a-1| = 1$.

4. Montrer que si le degré de P est strictement positif, alors P a pour unique racine 0.

5. Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(\star)$.

Exercice 3 — Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $T : E \to E$ par :

$$\forall f \in E, \qquad T(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'application T définit un endomorphisme de E.
On démontrera que T est effectivement une application de E dans E ; c'est-à-dire, que si $f \in E$, alors la fonction $T(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'endomorphisme T est injectif.

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{|x|}$.

a. Étudier la fonction g sur $\mathbb{R}$ (variations, limites et représentation graphique).

b. Déterminer soigneusement $T(g)$.
Lors du calcul de $T(g)(x)$, vous devrez distinguer les cas $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$.

c. Montrer que $g \in \mathrm{Im}(T)$.

4. a. Montrer que $\mathrm{Im}(T) = \left\{h \in E \mid h \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \lim_{x\to 0} xh'(x) = 0\right\}$.

b. Vérifier que l'ensemble $\mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonction réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(T)$.

c. Justifier que l'ensemble $\mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonction réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathrm{Im}(T)$ (*i.e.* justifier que $\mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq \mathrm{Im(T)}$).

5. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(0) = 0$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.

a. Montrer que la fonction u est un élément de E.

b. La fonction u appartient-elle à $\mathrm{Im}(T)$?

c. L'endomorphisme T est-il surjectif ?

6. Montrer que si $f \in E$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors $T(f)$ admet également un développement limité à l'ordre n en 0 ; l'exprimer en fonction de celui de f.

7. On suppose dans cette question que f est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(f)(x) \leq f(x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $T(f)(x) \geq f(x)$.

b. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,

$$T(f)'(x) = \frac{f(x) - T(f)(x)}{x}.$$

c. En déduire que $T(f)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

CORRIGE

Exercice 1 — On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$P \longmapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$

1/ Soit P un polynôme de degré $\leqslant 3$. On a :

$$\deg\left(XP'' + (X-4)P' - 3P\right) \leqslant \max\left(\deg(XP''), \deg\left((X-4)P'\right), \deg(-3P)\right)$$

Or : $\deg(XP'') \leqslant 2$, $\deg((X-4)P') \leqslant 3$ et $\deg(-3P) \leqslant 3$.

Par suite : $\deg\left(XP'' + (X-4)P' - 3P\right) \leqslant 3$.

Ainsi : $\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ce qui assure déjà que f est bien définie.

Considérons à présent deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_3[X]$, et deux réels λ et μ. On a :

$f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)'' + (X-4)(\lambda P + \mu Q)' - 3(\lambda P + \mu Q)$

$$= \lambda XP'' + \mu XQ'' + \lambda(X-4)P' + \mu(X-4)Q' - 3\lambda P - 3\mu Q = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui assure que f est linéaire. $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])}$.

2/ On a : $f(1) = -3$; $f(X) = -2X - 4$; $f(X^2) = -X^2 - 6X$ et $f(X^3) = -6X^2$. On en déduit que la matrice $M = M_B(f)$ de f dans la base canonique $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\boxed{M = M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3/ Notons $X_B \in \mathbb{R}^4$ le quadruplet des coordonnées de $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$ dans la base B. D'après la question précédente :

$$X_B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\boxed{f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}}$

4/ On a : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3}$.

On en déduit que : $\dim(\mathrm{Im}f) = 3$. Puisque $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ sont clairement non coplanaires, la famille $\mathscr{F} = \{f(1), f(X), f(X^2)\}$ est une famille libre de $\mathrm{Im}f$; son cardinal étant égal à la dimension de $\mathrm{Im}f$, la famille $\mathscr{F}$ en est une base. Donc : $\dim(\mathrm{Im}f) = 3$.

Enfin, $\mathscr{F}$ étant composée de 3 polynômes de degré inférieur ou égal à 2, $\mathrm{Im}f$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisqu'en outre $\mathrm{Im}f$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont de même dimension, on peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Im}f = \mathbb{R}_2[X]}$.

5/ D'après la question précédente et le théorème du rang : $\dim(\ker f) = 1$. Or, d'après la question 3, $X^3 - 6X^2 + 18X - 24 \in \ker f$.

Conclusion. Le noyau de f est la droite vectorielle : $\ker f = \mathrm{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

6/ D'après la question 4, $\mathrm{Im}f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est un sev de dimension 3 dans un ev de dimension 4). D'après la question 5, $\ker f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}_3[X]$ engendrée par le polynôme $P_1 = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$. Puisque P_1 est de degré 3, il n'appartient pas à $\mathrm{Im}f$.

On peut donc conclure : $\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Im}f \bigoplus \ker f}$.

7/ **Diagonalisation de** f.

a/ D'après la question 2, on a : $f(X-4) = f(X) - 4f(1) = -2X - 4 - 4(-3) = -2X + 8 = -2(X-4)$.
Conclusion. $f(X-4) = -2(X-4)$.

b/ Soit Q un polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $Q = X^2 + bX + c$. Notons X_B le quadruplet des coordonnées de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$[f(Q) = -Q] \Longleftrightarrow [MX_B = -X_B] \Longleftrightarrow [(M + \mathrm{I}_4)X_B = 0_{\mathbb{R}^4}]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2c - 4b & = & 0 \\ -b - 6 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -6 \\ c & = & 12 \end{array}\right.$$

Donc le polynôme $Q = X^2 - 6X + 12$ est l'unique polynôme unitaire de degré 2 tel que : $f(Q) = -Q$.

Par ailleurs, on a déjà établi que $\ker f = \mathrm{Vect}(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)$.

Donc le polynôme $R = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$ est l'unique polynôme unitaire tel que : $f(R) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.

c/ Notons : $B' = \{1, X-4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$. Supposons qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que :

$$a + b(X-4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0$$

Alors : $dX^3 + (c - 6d)X^2 + (18d - 6c + b)X + a - 4b + 12c - 24d = 0$. Par identification des coefficients en X^3, on a : $d = 0$.

D'où : $cX^2 + (-6c + b)X + a - 4b + 12c = 0$. Par identification des coefficients en X^2, on a : $c = 0$.

D'où : $bX + a - 4b = 0$. Par identification des coefficients en X, on a : $b = 0$. D'où $a = 0$.

Ainsi : $[a + b(X-4) + c(X^2 - 6X + 12) + d(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0] \Longrightarrow [a = b = c = d = 0]$.

Ce qui prouve que B' est libre. Puisque de plus le cardinal de B' est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, on peut affirmer que B' est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion. La famille $\{1, X-4, X^2 - 6X + 12, X^3 - 6X^2 + 18X - 24\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

d/ On a $f(1) = -3$ (quest. 2) ; $f(X-4) = -2(X-4)$ (quest. 7-a) ;

$f(X^2 - 6X + 12) = -(X^2 - 6X + 12)$ (quest. 7-b) ; $f(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ (quest. 3).

On en déduit que la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B' est : $\boxed{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

e/ Notons $P = P_{BB'}$ la matrice de passage de la base canonique à la base B'.

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 & -24 \\ 0 & 1 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme toute matrice de passage, P est inversible*, et $P^{-1} = P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}$.

D'après la formule du changement de base, on a : $\boxed{M_{B'}(f) = P_{BB'}^{-1} M_B(f) P_{BB'}}$.

Avec les notations de l'énoncé, on a donc : $\boxed{D = P^{-1}MP}$.

8/ **Sev engendré par les itérés de f.**

a/ D'après la question 7-d, on a : $D = \operatorname{diag}(-3,-2,-1,0)$. On en déduit que : $D + \mathrm{I}_4 = \operatorname{diag}(-2,-1,0,1)$, $D + 2\mathrm{I}_4 = \operatorname{diag}(-1,0,1,2)$ et $D + 3\mathrm{I}_4 = \operatorname{diag}(0,-2,1,2)$.

On en déduit que : $D\,(D+\mathrm{I}_4)\,(D+2\mathrm{I}_4)\,(D+3\mathrm{I}_4) = \operatorname{diag}(0,0,0,0)$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ U(D) = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}}$

b/ D'après la question précédente, on a : $D = P^{-1}MP$. Par ailleurs, pour tout réel λ : $\lambda \mathrm{I}_4 = \lambda P^{-1}\mathrm{I}_4 P$.

On en déduit que, pour tout réel λ on a : $D + \lambda\mathrm{I}_4 = P^{-1}MP + \lambda P^{-1}\mathrm{I}_4 P = P^{-1}\,(M + \lambda\mathrm{I}_4)\,P$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ D + \lambda\mathrm{I}_4 = P^{-1}\,(M+\lambda\mathrm{I}_4)\,P \text{ soit encore : } M + \lambda\mathrm{I}_4 = P\,(D+\lambda\mathrm{I}_4)\,P^{-1}}$.

c/ Par définition du polynôme U, on a : $U(M) = M\,(M+\mathrm{I}_4)\,(M+2\mathrm{I}_4)\,(M+3\mathrm{I}_4)$.

On déduit alors de la question précédente que :

$$U(M) = \underbrace{PDP^{-1}}_{=M}\,\underbrace{P\,(D+\mathrm{I}_4)\,P^{-1}}_{M+\mathrm{I}_4}\,\underbrace{P\,(D+2\mathrm{I}_4)\,P^{-1}}_{M+2\mathrm{I}_4}\,\underbrace{P\,(D+3\mathrm{I}_4)\,P^{-1}}_{M+3\mathrm{I}_4}$$

$$= PD\,(D+\mathrm{I}_4)\,(D+2\mathrm{I}_4)\,(D+3\mathrm{I}_4)\,P^{-1} = P\,\underbrace{U(D)}_{=0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}}\,P^{-1} = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ U(M) = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}}$

* Il est d'ailleurs clair que P est une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ de rang 4, donc inversible.

d/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $X^n = UQ_n + R_n$, avec $\deg(R_n) < \deg(U)$.

Puisque U est un polynôme de degré 4, le polynôme R_n est dans $\mathbb{R}_3[X]$. Il existe par conséquent quatre réels a_n, b_n, c_n et d_n tels que : $R_n = a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$.

On en déduit que : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$. L'évaluation de cette relation en 0 donne : $d_n = 0^n$, soit $d_n = 0$ (puisque $n \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion. Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que :

$$X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$$

d/ Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente, on a : $X^n = UQ_n + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX$.

Par conséquent : $M^n = U(M)Q_n(M) + a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Or $U(M) = 0_{\mathrm{M}_4(\mathbb{R})}$ d'après la question 8-c.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = a_nM^3 + b_nM^2 + c_nM$. Et naturellement : $M^0 = \mathrm{I}_4$. $\quad (\spadesuit)$

Notons à présent $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3)$ le sev de $M_4(\mathbb{R})$ engendré par $B_0 = \{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Il existe $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_kX^k$.

On a : $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\varphi\left(X^k\right) = \sum_{k=0}^{N} a_kM^k$. Puisque les matrices M^k appartiennent à F d'après $(\spadesuit)$, et que F est un sev de $M_4(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire des matrices M^k appartient à F. Par suite : $\varphi(P) \in F$. Ce qui assure que : $\mathrm{Im}\varphi \subset F$.

Réciproquement, il est immédiat que : $\mathrm{I}_4 = \varphi(1)$; $M = \varphi(X)$; $M^2 = \varphi(X^2)$ et $M^3 = \varphi(X^3)$ (les polynômes 1, X, X^2 et X^3 sont en effet dans $\mathbb{R}_N[X]$ puisque $N \geqslant 3$). Les générateurs de F appartiennent à l'image de φ. Puisque $\mathrm{Im}\varphi$ est également un sev, on en déduit que : $F \subset \mathrm{Im}\varphi$.

On a donc établi que : $\mathrm{Im}\varphi = F$, c'est à dire : $\boxed{\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3)}$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $B_0 = \{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$ est libre pour conclure.

A cette fin, on considère la famille $B_1 = \{\mathrm{I}_4, D, D^2, D^3\}$. Montrons que B_1 est libre. Supposons qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que : $a\mathrm{I}_4 + bD + cD^2 + dD^3 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

Alors : $\begin{pmatrix} a-3b+9c-27d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2b+4c-8d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

D'où : $\left\{\begin{array}{rcl} a-3b+9c-27d & = & 0 \\ a-2b+4c-8d & = & 0 \\ a-b+c-d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3b+9c-27d & = & 0 \\ -2b+4c-8d & = & 0 \\ -b+c-d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ -3b+9c-27d & = & 0 \\ -2b+4c-8d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ 6c-24d & = & 0 \\ 2c-6d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b-c+d & = & 0 \\ 6c-24d & = & 0 \\ 6d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que la famille $B_1 = \{\mathrm{I}_4, D, D^2, D^3\}$ est libre.

Par ailleurs, l'application $\rho : C \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto PCP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ (d'automorphisme réciproque $\rho^{-1} : C \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \longmapsto P^{-1}CP$).

Puisque la famille B_0 est l'image de B_1 par ρ, la famille B_0 est libre (l'image d'une famille libre par une application injective étant libre).

En résumé, on a montré que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\right)$, et que la famille $\{\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\}$ est libre. On en déduit que $\mathrm{Im}\varphi$ est de dimension 4.

Conclusion. $\mathrm{rg}(\varphi) = 4$ et $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_4, M, M^2, M^3\right)$

Exercice 2 — Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(\star) \qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$$

1/ Soit $a \in \mathbb{C}$. Supposons que a est une racine de P. Alors : $P(a) = 0$ d'où $P((a+1)-1) = 0$. Puisque P satisfait la relation $(\star)$, on en déduit que : $P\left((a+1)^2-1\right) = 0$.

De manière analogue : $P((a-1)+1) = 0$. Puisque P satisfait la relation $(\star)$, on en déduit que : $P\left((a-1)^2-1\right) = 0$.

Conclusion. $\forall\, a \in \mathbb{C},\ [P(a) = 0] \Rightarrow \left[P\left((a+1)^2-1\right) = 0 \wedge P\left((a-1)^2-1\right) = 0\right]$

2/ Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

a/ Supposons que a_0 est racine de $\mathbb{C}$. Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "a_n est racine de P".

L'assertion $A(0)$ est vraie, par hypothèse.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Ceci signifie que a_n est racine de P. D'après la question 1, le complexe $(a_n+1)^2-1$ est également racine de P.
Or : $(a_n+1)^2-1 = a_n^2+2a_n = a_{n+1}$. Donc a_{n+1} est racine de P. Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $[a_0 \text{ racine de } P] \Longrightarrow [\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \text{ racine de } P]$.

b/ Supposons $a_0 > 0$. Montrons que la suite (a_n) est à termes strictement positifs.

Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "$a_n > 0$".

L'assertion $A(0)$ est vraie, par hypothèse.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. On a : $a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{>0} + 2\underbrace{a_n}_{>0}$. Donc $a_{n+1} > 0$. Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

Pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n$. D'après ce qui précède : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n > 0$. La suite (a_n) est donc strictement croissante.

Conclusion. Si a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

c/ Supposons que P possède une racine réelle strictement positive ; notons la a_0. D'après la question 2-a, tous les réels a_n sont racines de P ; et d'après la question précédente, les réels a_n sont deux à deux distincts. On en déduit que le polynôme P possède une infinité de racines, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle P est non nul.

Conclusion. P ne possède pas de racine strictement positive.

d/ Supposons que -1 est racine de P. Alors, d'après la question 1, le réel $\alpha = (-1-1)^2 - 1$ est également racine de P. Or $\alpha = 3$; et le polynôme P n'admet aucune racine strictement positive d'après la question précédente : contradiction.

Conclusion. -1 n'est pas racine de P.

e/ Notons, pour tout entier naturel n, $A(n)$ l'assertion : "$a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$".

L'assertion $A(0)$ est clairement vraie.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2 = \left[(a_0+1)^{2^n}\right]^2 = (a_0+1)^{2^{n+1}}$$

Ce qui signifie que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3/ Soit a une racine de P. La suite (a_n) construite comme précédemment, en posant $a_0 = a$, est telle que a_n est racine de P pour tout entier naturel n.

Supposons que $|a+1| \neq 1$. D'après la question précédente : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |a_n+1| = |a+1|^{2^n}$.

Soient n et m deux entiers naturels distincts. On a :

$$\left[\ |a+1|^{2^n} = |a+1|^{2^m}\right] \underbrace{\iff}_{|a+1|\in\mathbb{R}_+} [\ |a+1| = 0\ \vee\ |a+1| = 1]$$

Or $|a+1| \neq 1$ par hypothèse, et $|a+1| \neq 0$ puisque la nullité de $|a+1|$ est équivalente à l'assertion $a = -1$, et que (-1) n'est pas racine de P d'après la question 2-d.

On en déduit que les réels $|a_n+1|$ sont deux à deux distincts, et par suite que les complexes a_n sont deux à deux distincts. On en déduit donc encore une fois que le polynôme P admet une infinité de racines, ce qui contredit le fait qu'il est non nul.

Conclusion. Soit $a \in \mathbb{C}$. Si a est racine de P, alors $|a+1| = 1$.

4/ Soit $a \in \mathbb{C}$. Si a est racine de P, alors $|a+1| = 1$ (cf ci-dessus) et $|a-1| = 1$ (énoncé). Le complexe a est donc l'affixe d'un point situé à une distance égale à 1 du point d'affixe 1 et du point d'affixe -1 ; le point d'affixe 0 est l'unique point satisfaisant ces conditions. D'où $a = 0$.

Dans le cas où P est un polynôme non constant, alors il possède toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Et d'après ce qui précède, il ne peut posséder que 0 comme racine. Par suite, si P est non constant, il existe un complexe α non nul tel que : $P = \alpha X^{\deg(P)}$.

Conclusion. Si $\deg(P) > 0$, alors P ne possède que 0 comme racine.

5/ Il est immédiat que $0_{\mathbb{C}[X]}$ et $1_{\mathbb{C}[X]}$ sont les seuls polynômes constants vérifiant $(\star)$.

Soit P un polynôme non constant satisfaisant $(\star)$. D'après la question précédente : $P = \alpha X^n$ (avec $n = \deg(P)$, et $\alpha \in \mathbb{C}^*$).

Par ailleurs, puisque P vérifie $(\star)$, on a :

$$\left[\alpha\left(X^2-1\right)^n = \alpha(X-1)^n\alpha(X+1)^n\right] \Longleftrightarrow \left[\alpha\left(X^2-1\right)^n = \alpha^2\left(X^2-1\right)^n\right] \Longleftrightarrow [\alpha^2 = \alpha]$$

$$\Longleftrightarrow [\alpha(\alpha-1) = 0] \underbrace{\Longleftrightarrow}_{(\alpha\neq 0)} [\alpha = 1]$$

En résumé, si P est un polynôme non constant vérifiant $(\star)$, alors $P = X^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, le polynôme X^n vérifie cette condition pour tout entier naturel n (nul ou non).

Conclusion. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$ est :

$$\left\{X^k \,/\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\}$$

Exercice 3

1. *La partie « difficile » de la question est celle qui consiste à montrer que si $f \in E$, alors la fonction $T(f)$ appartient aussi à E.* [*]

   La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue f. Donc par produit, $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à vérifier la continuité en 0. Si $x \neq 0$, alors

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0).$$

   La fonction définissant $T(f)$ est donc continue. Ainsi $T : E \to E$ est une application correctement définie.

   Montrons que T est linéaire. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $h = T(\lambda f + \mu g)$; on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{cases} \lambda f(0) + \mu g(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) \end{aligned}$$

   par linéarité de l'intégrale. Donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$. T est donc linéaire et T est un endomorphisme de E.

2. Pour montrer que l'endomorphisme T est injectif, on va déterminer son noyau $\mathrm{Ker}(T)$. Soit $f \in E$ tel que $T(f) = 0$ (0 désigne ici la fonction nulle de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Premièrement, puisque $T(f)(0) = f(0)$, on voit que $f(0) = 0$ et il reste à montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $T(f)(x) = 0$ donc

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xT(f)(x) = 0.$$

   Donc $F' = f$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

   Le noyau de T est donc réduit au singleton $\{0\}$ et T est injectif.

3. **a.** La fonction g est paire, strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

   La représentation graphique de g est visible sur la figure 1.

---

[*]. Observez qu'il est en fait incorrect de parler de $T(f)$ avant d'avoir démontré que l'application T est correctement définie.

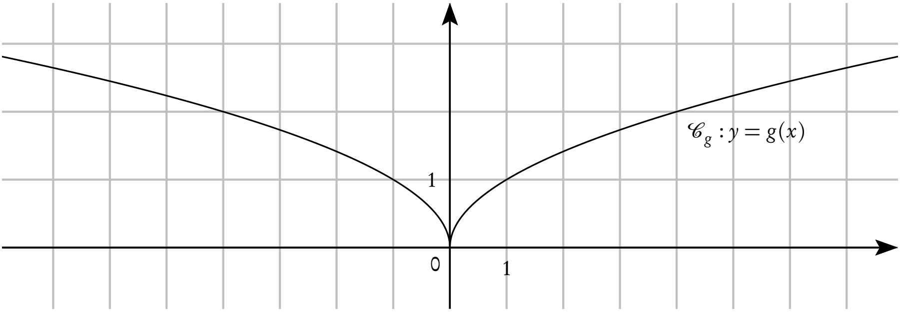

FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{|x|}$.

b. Observons que $g \in E$. On a d'une part $T(g)(0) = g(0) = 0$. Soit un réel $x > 0$; sur le segment $[0, x]$, on a $g(t) = \sqrt{t}$ donc

$$T(g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\frac{2}{3}t^{3/2}\Big]_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{|x|}.$$

Soit un réel $x < 0$; sur $[x, 0]$, on a $g(t) = \sqrt{-t}$ donc

$$T(g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x (-t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[-\frac{2}{3}(-t)^{3/2}\Big]_0^x = \frac{2}{3}\sqrt{-x} = \frac{2}{3}\sqrt{|x|}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(g)(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x|}$. Ainsi, $T(g) = \frac{2}{3}\,g$.

c. On vient de voir que $T(g) = \frac{2}{3}\,g$ donc $T(\frac{3}{2}\,g) = g$. Ainsi, $g \in \mathrm{Im}(T)$.†

4. a. On procède par double inclusion. Soit $h \in \mathrm{Im}(T)$, montrons que h est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $xh'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Il existe $f \in E$ telle que $T(f) = h$. Il est clair que $h = T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$). Enfin, pour tout $x \neq 0$,

$$h'(x) = T(f)'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad xh'(x) = f(x) - T(f)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, $T(f)$ est continue en 0 et $T(f)(0) = f(0)$ donc $T(f)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$. La première inclusion est donc démontrée.

Pour montrer l'autre inclusion, on procède par analyse et synthèse. Soit h une fonction de l'ensemble en question.

---

†. La fonction g est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{2}{3}$ de T.

Analyse. On suppose qu'il existe $f \in E$ telle que $T(f) = h$. On a $f(0) = h(0)$ et pour tout $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad \text{et} \quad xh(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

On obtient en dérivant la dernière égalité (les deux membres définissent des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) + xh'(x) = f(x).$$

Synthèse. On définit f de la manière suivante : $f(0) = h(0)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = h(x) + xh'(x)$. Vérifions que $f \in E$ puis que $T(f) = h$. Les hypothèses faites sur h permettent de voir que $f \in E$. On a $T(f)(0) = f(0) = h(0)$ donc il reste à vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $T(f)(x) = h(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(h(t) + th'(t)\big)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x th'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\Big[t\,h(t)\Big]_0^x - \frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t = h(x) \end{aligned}$$

où l'on a fait une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$, $v : t \mapsto h(t)$ (qui sont des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$).
Conclusion. $\mathrm{Im}(T) = \big\{h \in \mathscr{C} \mid h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $xh'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\big\}$.

b. Il est évident que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(T)$.

c. Il est strict car on a vu que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{|x|} \in \mathrm{Im}(T)$. Or, cette fonction n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car non dérivable en 0.

5. a. La fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de telles fonctions. Elle est aussi continue en 0. En effet,

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc par un théorème d'encadrement, $u(x) = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = u(0)$. Donc $u \in E$.

b. Pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$u'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où

$$xu'(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $xu'(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$.[‡] Ainsi, $u \notin \mathrm{Im}(T)$.

‡. Considérer par exemple la suite convergeant vers 0 : $(\frac{1}{n\pi})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c. L'endomorphisme T n'est donc pas surjectif car $u \in E$ n'admet pas d'antécédent par T.

6. Supposons que f admette le DL d'ordre n en 0 suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Alors, par intégration de ce DL, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet le DL d'ordre $n+1$ en 0 suivant :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{x+1} + \mathrm{o}(x^{n+1}).$$

Ainsi, puisque $F(0) = 0$,

$$T(f)(x) = \frac{F(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{2}x + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

lorsque $x \to 0$.

7. a. Soit un réel $x > 0$; on a

$$f(x) - T(f)(x) = \frac{1}{x}\left(xf(x) - \int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \underbrace{(f(x) - f(t))}_{\geq 0}\mathrm{d}t \geq 0$$

car f est supposée croissante et par positivité de l'intégrale. L'autre inégalité se démontre de la même manière.

b. C'est un bête calcul... encore faut-il se souvenir que la dérivée de $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est f.

c. D'après la question précédente, on voit que $T(f)$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ vérifie $T(f)'(x) \geq 0$ pour tout réel $x \neq 0$. La fonction $T(f)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.[§]

8. a. On a

$$v(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Donc v se prolonge par continuité en 0 en posant $v(0) = 1$. La fonction v est alors continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$v'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{x^2},$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

§. Attention, le fait que $T(f)$ soit continue en 0 est très important. Par exemple, la fonction inverse a une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. La fonction inverse n'est cependant pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

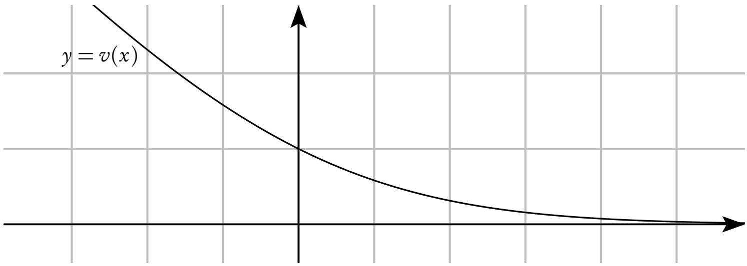

FIGURE 2 – Représentation graphique de v.

donc

$$v'(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Donc par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction v est dérivable en 0 et $v'(0) = -\frac{1}{2}$. Puis, étant donné que $v'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2} = v'(0)$, la fonction v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'après la question 5, $v \in \mathrm{Im}(T)$. En reprenant les calculs de la question 4, on voit que l'unique antécédent de v (T est injectif) est la fonction f définie par

$$f(0) = v(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = v(x) + xv'(x).$$

c. Il est peut être plus facile de montrer que $\frac{1}{v}$ est une fonction strictement croissante et strictement positive, donc v est strictement décroissante et strictement positive. De plus, $\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = 0$. La représentation graphique de v est visible sur la figure 2.

d. Tous les DL sont au voisinage de 0. On a

$$\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

donc

$$v(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)} = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2).$$

D'après la question 6,

$$T(v)(x) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{36} + \mathrm{o}(x^2).$$

e. Montrons que $T(v)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour cela, on va montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$v(x) \leq \mathrm{e}^{-x/2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$v(x) \leq \mathrm{e}^{-x/2} \iff x \leq \mathrm{e}^{x/2} - e^{-x/2} \iff x \leq 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{sh}(t) \geq t$ *(c'est plus ou moins du cours)*. On pose pour $t \geq 0$, $w(t) = \mathrm{sh}(t) - t$; w est $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $t \geq 0$, $w'(t) = \mathrm{ch}(t) - 1 \geq 0$ *(ça c'est du cours)*. Donc w est croissante et pour tout $t \geq 0$, $w(t) \geq w(0) = 0$, autrement dit, $\mathrm{sh}(t) \geq t$.

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$T(v)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x/2}}{2x} \leq \frac{1}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or il est clair que $T(v)$ ($T(v)(x)$ est la valeur moyenne de v sur l'intervalle $[0,x]$) est une fonction positive donc par un théorème d'encadrement, $T(v)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.