Simulation DS N° 7

Algèbre Linéaire

Polynômes, EV & Matrices

Problème – Méthode de calcul approché d'une intégrale

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2, et par f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ du segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{J}(f)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.
Dans la partie I, on étudie le polynôme $P_n=(X^2-1)^n$, ses dérivées $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée n-ième $P_n^{(n)}$. Par convention, on note $P_n^{(0)}=P_n$.
Les parties II et III proposent l'étude de deux procédés d'« interpolation polynomiale » de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul approché de $\mathcal{J}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.
On rappelle l'inégalité triangulaire pour les intégrales : pour tout application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Partie I – Étude des polynômes P_n

1. **Étude des racines de P_n et de ses dérivées**
   (a) Quelles sont les racines de P_n ? Déterminer leur ordre de multiplicité.
   (b) Déterminer, pour tout $j\in[\![0,n-1]\!]$, les valeurs de $P_n^{(j)}(1)$ et de $P_n^{(j)}(-1)$.
   (c) À l'aide d'un théorème du cours dont on rappellera l'énoncé précis, montrer que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1,1[$.
   (d) Montrer plus généralement que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines dans $]-1,1[$.
   (e) En déduire que $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes, et que ces racines sont simples et appartiennent toutes à l'intervalle $]-1,1[$.

   Dans la suite du problème, ces racines sont notées $r_1,\cdots,r_n$, avec $-1<r_1<\cdots<r_n<1$.
2. **Calcul d'une intégrale auxiliaire**
   On pose, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, $W(p,q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(t-1)^p(t+1)^q\ \mathrm{d}t$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, une relation entre $W(p+1,q-1)$ et $W(p,q)$.
   (b) En itérant cette relation, en déduire une relation entre $W(2n,0)$ et $W(n,n)$.
   (c) Calculer $W(2n,0)$, et en déduire que $W(n,n)=(-1)^n\cdot\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. **Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées**

   (a) Établir, à l'aide d'une récurrence sur j, que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, et tout $j \in [\![0, n]\!]$,

   $$\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(j)}(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^j \int_{-1}^{1} Q^{(j)}(t)P_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (On pourra penser à faire une intégration par parties)

   (b) Déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)$ lorsque Q est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

   (c) Expliciter $P_n^{(2n)}$, puis calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2\ \mathrm{d}t$.
   (On pourra faire intervenir $W(n,n)$)

Partie II – Définition de l'approximation

1. **Polynômes d'interpolation de Lagrange**

   On pose désormais, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, et pour tout nombre réel x, le polynôme L_j et le réel λ_j suivants :

   $$L_j = \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} \frac{X - r_i}{r_j - r_i} \qquad \textit{et} \qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $L_j(r_i)$, en distinguant suivant que i est égal à j ou non.

   (b) En déduire que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre, puis que c'est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   (c) Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n, et prouver qu'un tel polynôme est unique.

   (d) Établir l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{J}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ l'intégrale $\mathcal{J}(A_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)\ \mathrm{d}t$, que l'on notera $J_n(f)$ dans la suite du problème.

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{J}(f)$ le nombre réel $J_n(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$.

2. **Comparaison de $\mathcal{J}(P)$ et $\mathcal{J}_n(P)$ lorsque P est un polynôme**

   Dans cette question, on suppose que P est un polynôme.

   (a) *On suppose que* $\deg(P) < n$.
   Comparer $\mathcal{J}(P)$ et $\mathcal{J}_n(P)$.

   (b) *On suppose que* $\deg(P) < 2n$.

      i. Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q,R) de polynômes tel que :

      $$P = QP_n^{(n)} + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < n.$$

      ii. Montrer que $\deg(Q) < n$.

      iii. Déduire des résultats de la partie I que $\mathcal{J}(P) = \mathcal{J}(R)$.

      iv. Comparer $\mathcal{J}_n(R)$ et $\mathcal{J}_n(P)$, puis $\mathcal{J}(P)$ et $\mathcal{J}_n(P)$.

Partie III – Majoration de l'erreur

1. **Polynôme d'interpolation de Hermite de f**

   (a) *À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on associe l'élément de $\mathbb{R}^{2n}$ suivant :*

   $$\varphi(H) = (H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \ldots, H(r_n), H'(r_n)).$$

   Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

   (b) Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ est un isomorphisme.

   (c) En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que :

   $$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad B_n(r_j) = f(r_j) \qquad \text{et} \qquad B'_n(r_j) = f'(r_j).$$

   (d) Déduire des résultats précédents que $\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}_n(B_n)$, puis enfin que $\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}_n(f)$.

2. **Majoration de $|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}_n(f)|$**

   (a) Justifier que $|f^{(2n)}|$ admet sur l'intervalle $[-1, 1]$ un maximum, que l'on notera $M_{2n}(f)$.

   (b) *Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné de $[-1, 1]$, distinct des nombres $r_1, \ldots, r_n$. On définit l'application g_x sur $[-1, 1]$ par la relation*

   $$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \cdot (P_n^{(n)}(t))^2,$$

   où le réel α est précisé dans la question (i) ci-dessous.

   i. Justifier que l'on peut choisir α de sorte que $g_x(x) = 0$, et que ce choix est unique.
   Désormais α est choisi ainsi.

   ii. Calculer $g'_x(r_1), \ldots, g'_x(r_n)$.

   iii. En considérant $n+1$ réels convenablement choisis annulant g_x, montrer que g'_x s'annule en au moins n points de $]-1, 1[$ distincts de $r_1, \ldots, r_n$.

   iv. En déduire que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1, 1]$.

   v. Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$, et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

   vi. À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que

   $$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \cdot f^{(2n)}(c)(P_n^{(n)}(x))^2.$$

   (c) Prouver que, pour tout réel x de $[-1, 1]$,

   $$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f)(P_n^{(n)}(x))^2.$$

   On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

   (d) Déduire alors des résultats des parties I et II que :

   $$|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. *Soit g une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur un segment $[a, b]$, et soit $M_{2n}(g)$ la maximum de la fonction $|g^{(2n)}|$ sur l'intervalle $[a, b]$. On définit f sur $[-1, 1]$ par $f(t) = g\left(\frac{a+b}{2} + t \cdot \frac{b-a}{2}\right)$, et on note comme précédemment $M_{2n}(f)$ le maximum de $|f^{(2n)}|$ sur $[-1, 1]$*

   (a) Exprimer $M_{2n}(f)$ en fonction de $M_{2n}(g)$ et de n.

(b) En admettant que $\displaystyle\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, donner un majorant de

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\frac{b-a}{2}\right)\right|$$

en fonction de $M_{2n}(g)$, n, a et b.

Partie IV – Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $n=2$. On considère une fonction g définie et de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[a,b]$.

1. Déterminer P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1 et L_2, ainsi que les réels λ_1 et λ_2.
2. Montrer que

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}.$$

3. En subdivisant le segment $[a,b]$ en p intervalles de même longueur, montrer que

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(c_k-\frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)+g\left(c_k+\frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^4},$$

où, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, c_k est le milieu du k-ième intervalle de cette subdivision.

4. *Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.*
   (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.
   (b) Calculer $g^{(k)}$ pour tout $k\in[\![1,4]\!]$.
   (c) Montrer que

$$\left|\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(\frac{2k-1-p}{2p}-\frac{1}{p\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{2k-1-p}{2p}+\frac{1}{p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{36}{135p^4}.$$

   (d) Écrire une procédure en Pascal déterminant p pour que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(\frac{2k-1-p}{2p}-\frac{1}{p\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{2k-1-p}{2p}+\frac{1}{p\sqrt{3}}\right)\right)$$

   soit une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à `err` près, et calculant cette valeur approchée dans une variable `I`. La marge d'erreur `err` sera prise en paramètre de la procédure, ainsi que la variable `I`. On pourra au préalable définir une certaine fonction.

FIN

Correction du problème –

Partie I – Étude des polynômes P_n

1. **Étude des racines de P_n et de ses dérivées**

   (a) Le polynôme P_n s'écrit $P_n = (X-1)^n(X+1)^n$, ainsi, P_n admet deux racines 1 et -1, chacune de multiplicité n.

   (b) Par conséquent, d'après la caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine par les dérivées, on en déduit que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(j)}(1) = P_n^{(j)}(-1) = 0$.

   (c) On utilise le théorème de Rolle dont on rappelle ci-dessous l'énoncé :

   Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

   Ici, la fonction polynomiale P_n est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, d'après la question précédente. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1,1[$ tel que $P_n'(c) = 0$.

   (d) Soit, pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(j)$: $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines dans $]-1,1[$

   La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.

   Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(j)$ soit vraie. Alors $P_n^{(j)}$ admet j racines au moins dans $]-1,1[$, que l'on note $r_1, \ldots, r_j$, tel que $r_1 < \cdots < r_j$. Posons $r_0 = -1$ et $r_{j+1} = 1$. Alors on a $r_0 < r_1 < \cdots < r_{j+1}$, et $P^{(j)}(r_0) = \cdots = P^{(j)}(r_{j+1}) = 0$, d'après l'hypothèse de récurrence et la question I-1(b). Ainsi, en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[r_i, r_{i+1}]$, $i \in [\![0,j]\!]$, à la fonction polynomiale $P_n^{(j)}$ qui est continue sur cet intervalle, dérivable sur l'intervalle ouvert, on en déduit l'existence de $s_i \in]r_i, r_{i+1}[$ tel que $P^{(j+1)}(s_i) = 0$.

   Or, $-1 = r_0 < s_0 < r_1 < s_1 \cdots < r_j < s_j < r_{j+1} = 1$, donc $-1 < s_0 < s_1 < \cdots < s_j < 1$. Ainsi, les racines s_i de $P_n^{(j+1)}$ sont deux à deux distinctes, donc au nombre de $j+1$, et sont toutes dans $]-1,1[$, d'où $\mathcal{P}(j+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout j dans $[\![1, n-1]\!]$, $\mathcal{P}(j)$ entraîne $\mathcal{P}(j+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(j)$ est vraie pour tout j dans $[\![1,n]\!]$.

   (e) En particulier, pour $j = n$ qui est bien dans $[\![1,n]\!]$, on obtient que $P_n^{(n)}$ admet au moins n racines dans $]-1,1[$.

   Or, P_n est de degré $2n$, donc, après n dérivations, $P_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$. Par conséquent, P_n admet au plus n racines réelles (et exactement n racines complexes) comptées avec multiplicité. Ainsi, comme on a déjà n racines distinctes dans $]-1,1[$, ce sont les seules, et elles sont simples.

   Vous remarquerez qu'il s'agit des seules racines réelles, mais aussi des seules racines dans $\mathbb{C}$.

   Ainsi, $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines (réelles) deux à deux distinctes, de multiplicité 1, et ces racines sont dans $]-1,1[$.

2. **Calcul d'une intégrale auxiliaire**

   (a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ (car polynomiales) telles que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\begin{array}{rcl} u'(t) & = & (t-1)^p \\ u(t) & = & \frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} v(t) & = & (t+1)^q \\ v'(t) & = & q(t+1)^{q-1} \end{array}$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$W(p,q)=\left[\frac{1}{p+1}(t-1)^{p+1}(t+1)^q\right]_{-1}^1-\frac{q}{p+1}\int_{-1}^1(t-1)^{p+1}(t+1)^q\ \mathrm{d}t=-\frac{q}{p+1}W(p+1,q-1).$$

Ainsi, $W(p+1,q-1)=-\dfrac{p+1}{q}W(p,q)$.

(b) Soit, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $W(n+k,n-k)=(-1)^k\frac{(n+k)!(n-k)!}{(n!)^2}W(n,n)$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est triviale. On peut aussi remarquer que $\mathcal{P}(1)$ a été démontrée dans la question précédente.

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors, d'après la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}W(n+k+1,n-k-1)&=-\frac{n+k+1}{n-k}\cdot W(n+k,n-k)\\&=(-1)^{k+1}\frac{n+k+1}{n-k}\cdot\frac{(n+k)!(n-k)!}{(n!)^2}W(n,n)\\&=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(n+k+1)!(n-k-1)!}{(n!)^2}W(n,n).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $[\![1,n-1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

(c) $W(2n,0)=\displaystyle\int_{-1}^1(t-1)^{2n}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2n+1}(0^{2n+1}-(-2)^{2n+1})=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$. Ainsi,

$$W(n,n)=(-1)^n\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=(-1)^n\cdot\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. **Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées**

(a) Soit, pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(j)$: $\forall Q\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(j)}(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^j\int_{-1}^1 Q^{(j)}(t)P_n(t)\ \mathrm{d}t$

Pour $j=0$, l'identité est triviale, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Soit $j\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(j)$ soit vérifiée. Alors soit Q un polynôme quelconque. On a, par une intégration par partie (les polynômes étant de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(j+1)}(t)\ \mathrm{d}t=\left[Q(t)P_n^{(j)}(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 Q'(t)P_n^{(j)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, $P_n^{(j)}(1)=P_n^{(j)}(-1)=0$ d'après I-1(b), donc, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée au polynôme Q',

$$\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(j+1)}(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^{j+1}\int_{-1}^1 Q^{(j+1)}(t)P_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(j+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout j dans $[\![0,n-1]\!]$, $\mathcal{P}(j)$ entraîne $\mathcal{P}(j+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(j)$ est vraie pour tout j dans $[\![0,n]\!]$.

(b) Par conséquent, lorsque Q est un polynôme de degré strictement inférieur à n, $Q^{(n)}=0$, donc en prenant $j=n$ dans la question précédente, on trouve

$$\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t=0.$$

(c) P_n est un polynôme de degré $2n$, donc $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant, obtenu par dérivation du monôme dominant de P_n, qui est X^{2n}. La dérivée $2n$-ième de ce monôme est $(2n)!$, donc $P_n^{(2n)}=(2n)!$.

Ainsi, d'après la question I-3(a) appliquée avec $j=n$ et $Q=P_n^{(n)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1(P_n^{(n)}(t))^2\ \mathrm{d}t&=(-1)^n\int_{-1}^1 P_n^{(2n)}(t)P_n(t)\ \mathrm{d}t=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^1 P_n(t)\ \mathrm{d}t\\&=(-1)^n(2n)!W(n,n)=\frac{2^{2n+1}\cdot(2n)!\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{2n+1}.\end{aligned}$$

Partie II – Définition de l'approximation

1. **Polynômes d'interpolation de Lagrange**

   (a) • Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors

   $$L_j(r_i) = \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\neq j}} \frac{r_i - r_k}{r_j - r_k} = 0,$$

   car un des facteurs de ce produit (celui correspondant à $k = i$) est nul.

   • Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors

   $$L_j(r_j) = \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\neq j}} \frac{r_j - r_k}{r_j - r_k} = 1.$$

   Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(r_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(r_j) = 1$ si $i = j$.

   (b) Soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des réels tels que

   $$\mu_1 L_1 + \cdots + \mu_n L_n = 0.$$

   Soit $i \in [\![1,n]\!]$. En évaluant en r_i on trouve :

   $$0 = \mu_1 L_1(r_i) + \cdots + \mu_n L_n(r_i) = \mu_i$$

   d'après la question précédente, puisque seul $L_i(r_i)$ est non nul, égal à 1. Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i = 0$, donc la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est libre.

   Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, L_i est un polynôme de degré $n-1$. Ainsi, $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre de n vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est de dimension n. Ainsi, pour des raisons de cardinalité, cette famille libre est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   (c) • **Analyse.** Supposons qu'il existe un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $A_n(r_j) = f(r_j)$. Alors, puisque $A_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe des réels $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que

   $$A_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i.$$

   En évaluant en r_j, $j \in [\![1,n]\!]$, on obtient

   $$f(r_j) = A_n(r_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i(r_j) = \mu_j.$$

   Ainsi, $\mu_j = f(r_j)$. Par conséquent, si A_n existe, il est défini de manière unique par :

   $$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(r_i) L_i.$$

   • **Synthèse.** Réciproquement, le polynôme $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(r_i) L_i$ convient, puisque

   ∗ ce polynôme est bien de degré au plus $n-1$, en tant que combinaison linéaire de polynômes de degré au plus $n-1$,

   ∗ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, le seul terme non nul dans la somme définissant $A_n(r_j)$ est celui correspondant à $i = j$, et on obtient $A_n(r_j) = f(r_j) L_i(r_j) = f(r_j)$.

   (d) On a donc :

   $$\int_{-1}^{1} A_n(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} f(r_i) \int_{-1}^{1} L_i(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(r_i).$$

2. **Comparaison de $\mathcal{J}(P)$ et $\mathcal{J}_n(P)$ lorsque P est un polynôme**

(a) *On suppose que* $\deg(P) < n$.

Pour $f = P$, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_n(r_j) = P(r_j)$, et A_n et P sont donc deux polynômes de degré au plus $n-1$ ayant au moins n valeurs communes. Ainsi, le polynôme $A_n - P$, de degré au plus $n-1$, a au moins n racines. Par conséquent, il s'agit du polynôme nul. Ainsi, $A_n = P$. Par conséquent :

$$\mathcal{J}(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} A_n(t)\ \mathrm{d}t = \mathcal{J}_n(P).$$

(b) *On suppose que* $\deg(P) < 2n$.

i. Puisque $P_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$, donc est non nul, le théorème de la division euclidienne (de P par $P_n^{(n)}$), donne l'existence d'un unique couple (Q, R) de polynômes tel que

$$P = QP_n^{(n)} + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg P_n^{(n)} = n.$$

ii. Si $\deg Q \geqslant n$, on aurait $\deg(QP_n^{(n)}) = \deg Q + \deg P_n^{(n)} \geqslant 2n$. Or, $\deg R < n < 2n$, donc, d'après les propriétés des degrés d'une somme de polynômes, on obtiendrait :

$$\deg(P) = \deg(QP_n^{(n)}) \geqslant 2n,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $\deg Q < n$.

iii. On a

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, puisque $\deg Q < n$, on a, d'après la question I-3(b), $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Ainsi,

$$\mathcal{J}(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} R(t)\ \mathrm{d}t = \mathcal{J}(R).$$

iv. D'après la question I-1(e) (définition des r_j), les r_j sont racines de $P_n^{(n)}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P(r_j) = Q(r_j)P_n^{(n)}(r_j) + R(r_j) = R(r_j).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{J}_n(P) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(r_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(r_j) = \mathcal{J}_n(R).$$

Ainsi, puisque R est de degré au plus $n-1$, on obtient, grâce aux questions II-2(a) et II-2(b)-iii,

$$\mathcal{J}(P) = \mathcal{J}(R) = \mathcal{J}_n(R) = \mathcal{J}_n(P).$$

Partie III – Majoration de l'erreur

1. **Polynôme d'interpolation de Hermite de f**

(a) Tout d'abord, φ est bien une application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, par définition. Montrons que cette application est linéaire. Soit donc $H, K \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda H + K) &= ((\lambda H + K)(r_1), (\lambda H + K)'(r_1), \dots, (\lambda H + K)(r_n), (\lambda H + K)'(r_n))\\ &= (\lambda H(r_1) + K(r_1), \lambda H'(r_1) + K'(r_1), \dots, \lambda H(r_n) + K(r_n), \lambda H'(r_n) + K'(r_n))\\ &= \lambda(H(r_1), H'(r_1), \dots, H(r_n), H'(r_n)) + (K(r_1), K'(r_1), \dots, K(r_n), K'(r_n))\\ &= \lambda\varphi(H) + \varphi(K).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien une application linéaire.

(b) • Soit $H \in \operatorname{Ker} \varphi$. Ainsi, $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $H(r_j) = H'(r_j) = 0$. Ainsi, les r_j sont racines au moins doubles de H, et H admet donc au moins $2n$ racines comptées avec multiplicité (n racines au moins doubles). Or, H est de degré strictement inférieur à $2n$. Par conséquent, $H = 0$. Donc $\operatorname{Ker} \varphi \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

• Par conséquent, φ est une application injective. Or, $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$. Ainsi, φ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de **même** dimension **finie**, donc l'injectivité de φ entraîne sa bijectivité. Ainsi, φ est un isomorphisme.

(c) φ étant un isomorphisme, un élément de $\mathbb{R}^{2n}$ admet un et un seul antécédent par φ. Appliquons ceci au $2n$-uplet $(f(r_1), f'(r_1), \ldots, f(r_n), f'(r_n))$. Ce n-uplet admet un et un seul antécédent par φ, c'est-à-dire qu'il existe un unique polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad B_n(r_j) = f(r_j) \qquad \text{et} \qquad B_n'(r_j) = f'(r_j).$$

(d) D'après II-2(b)-iv, puisque $\deg B_n < 2n$, on a $\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}_n(B_n)$. De plus, puisque pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $B_n(r_j) = f(r_j)$, on obtient

$$\mathcal{J}(B_n) = \mathcal{J}_n(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j B_n(r_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j) = \mathcal{J}_n(f).$$

2. **Majoration de** $|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}_n(f)|$

(a) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1, 1]$. Ainsi, $f^{(2n)}$ est continue, donc aussi $|f^{(2n)}|$. Étant continue sur l'intervalle fermé et borné $[-1, 1]$, $|f^{(2n)}|$ y est bornée et y atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum. On le note $M_{2n}(f)$.

(b) i. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g_x(x) = 0 &\iff f(x) - B_n(x) = \alpha \cdot (P_n^{(n)}(x))^2 \\ &\iff \alpha = \frac{f(x) - B_n(x)}{(P_n^{(n)}(x))^2} \end{aligned}$$

On peut effectuer cette dernière division du fait que $P_n^{(n)}(x) \neq 0$, puisque x est distinct des racines r_j de $P_n^{(n)}$.

Ainsi, un α convenable existe, et on a une égalité le définissant de manière unique.

ii. g_x est dérivable sur $[-1, 1]$, et pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$g_x'(t) = f'(t) - B_n'(t) - 2\alpha \cdot P_n^{(n)}(t) P_n^{(n+1)}(t).$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$g_x'(r_j) = f'(r_j) - B_n'(r_j) - 2\alpha P_n^{(n)}(r_j) P_n^{(n+1)}(r_j) = 0,$$

du fait que r_j est racine de $P_n^{(n)}$, et que par définition de B_n, $f'(r_j) = B_n'(r_j)$.

iii. De la même façon, on a $g_x(r_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. De plus $g_x(x) = 0$. Ainsi, on a $n+1$ réels, tous dans $[-1, 1]$, annulant g_x. Notons les $-1 \leqslant s_1 < \cdots < s_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction g_x est continue sur chaque $[s_i, s_{i+1}]$, $i \in [\![1, n+1]\!]$, et dérivable sur chaque $]s_i, s_{i+1}[$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]s_i, s_{i+1}[$ tel que $g_x'(c_i) = 0$. On a donc

$$-1 \leqslant s_1 < c_1 < s_2 < c_2 < \cdots < s_n < c_n < s_{n+1} \leqslant 1, \qquad \text{donc:} \qquad -1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < 1.$$

Ainsi, les c_i, $i \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distinctes, et sont tous dans $]-1, 1[$. D'autre part ils sont distincts des s_i, donc des r_i. Ainsi, g_x' s'annule en au moins n points de $]-1, 1[$ distincts de $r_1, \ldots, r_n$.

iv. Comme g'_x s'annule aussi en $r_1, \dots, r_n$, g'_x s'annule en au moins $2n$ réels du segment $]-1,1[$.

Soit, pour tout k dans $[\![1, 2n]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $g_x^{(k)}$ s'annule en au moins $2n+1-k$ points de $]-1,1[$

Comme g'_x s'annule en $r_1, \dots, r_n$, et en n autres points de $]-1,1[$ d'après la question précédente, g'_x s'annule en au moins $2n$ réels du segment $]-1,1[$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Ainsi, $g_x^{(k)}$ s'annule en $2n+1-k$ points de $]-1,1[$ au moins, que l'on ordonne et note $-1 < t_1 < \cdots < t_{2n+1-k} < 1$.

La fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$, en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^{2n}$. En particulier, puisque $k < 2n$, $g^{(k)}$ est continue sur $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$. C'est donc le cas sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in [\![1, 2n+1-k-1]\!]$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué à chacun de ces intervalles, il existe $u_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tels que $g_x^{(k+1)}(u_i) = 0$. On a bien trouvé $2n+1-(k+1)$ réels de l'intervalle $]-1,1[$ annulant $g_x^{(k+1)}$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $[\![1, 2n-1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $[\![1, 2n]\!]$.

En particulier, pour $k = 2n$, $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins $2n+1-2n = 1$ point du segment $]-1,1[$ (donc du segment $[-1,1]$). On note c un tel point.

v. $(P_n^{(n)})^2$ est un polynôme de degré 2n, donc sa dérivée $2n$-ième est égale à la dérivée $2n$-ième de son monôme dominant, qui est

$$(2n(2n+1)\dots(n+1)X^n)^2 = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2 X^{2n}$$

En dérivant $2n$ fois ce monôme, on obtient le coefficient constant $\dfrac{((2n)!)^3}{(n!)^2}$.

De plus, B_n est un polynôme de degré strictement inférieur à $2n$, donc $B_n^{(2n)} = 0$. Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - \alpha \cdot \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}.$$

Ainsi, en évaluant en c :

$$0 = f^{(2n)}(c) - \alpha \cdot \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2} \qquad \text{soit:} \qquad \alpha = \frac{f^{(2n)}(c) \cdot (n!)^2}{((2n)!)^3}.$$

vi. En remplaçant α par l'expression trouvée dans la question précédente dans l'égalité $g_x(x) = 0$, on trouve :

$$0 = g_x(x) = f(x) - B_n(x) - \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \cdot f^{(2n)}(c) \cdot (P_n^{(n)}(x))^2,$$

d'où le résultat.

(c) • D'après l'égalité précédente, étant donné x distinct de $r_1, \dots, r_n$,

$$|f(x) - B_n(x)| = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} \cdot \left|f^{(2n)}(c)\right| \cdot (P_n^{(n)}(x))^2.$$

Ici, c dépend de x qu'on s'est posé initialement. Mais, par définition de $M_{2n}(f)$, puisque $c \in [-1,1]$, on a $|f^{(2n)}(c)| \leqslant M_{2n}(f)$, et par conséquent

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f)(P_n^{(n)}(x))^2.$$

Ici, le majorant ne dépend de x que par l'expression $P_n^{(n)}(x)$, et cette inégalité est vraie pour tout $x \in [-1,1]$ distinct de $r_1, \dots, r_n$.

• S'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = r_j$, alors $|f(x) - B_n(x)| = 0$, et l'inégalité est encore vraie, puisque le terme de droite est toujours positif ($M_{2n}(f)$ est positif car c'est la maximum d'une fonction positive).

Ainsi, l'inégalité est vraie pour tout $x \in [-1,1]$.

(d) On utilise l'inégalité triangulaire pour les intégrales, rappelée en introduction, ainsi que la question III-1(d) :

$$|\mathcal{J}(f)-\mathcal{J}_n(f)| = |\mathcal{J}(f)-\mathcal{J}(B_n)| = \left|\int_{-1}^{1}(f(t)-B_n(t))\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-1}^{1}|f(t)-B_n(t)|\ \mathrm{d}t.$$

On utilise maintenant la majoration de $|f(t)-B_n(t)|$ obtenue dans la question précédente :

$$|\mathcal{J}(f)-\mathcal{J}_n(f)| \leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}M_{2n}(f)\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2\ \mathrm{d}t.$$

La question I-3(c) donne alors :

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}(f)-\mathcal{J}_n(f)| &\leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}M_{2n}(f)\frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{2n+1}\\ &= M_{2n}(f)\cdot\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\cdot\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\\ &= \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2}\cdot\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

3. (a) f est la composée de g par la fonction affine $h : t\mapsto \frac{a+b}{2}+t\cdot\frac{b-a}{2}$. Or, $h([-1,1])\subset[a,b]$ (c'est même une égalité, h étant une bijection de $[-1,1]$ sur $[a,b]$ d'après le théorème de la bijection), et g est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a,b]$. Ainsi, $f=g\circ h$ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$. De plus, les règles de dérivation des fonctions composées donnent

$$\forall t\in[-1,1],\quad f'(t)=\frac{b-a}{2}g'\circ h(t),$$

et, par une récurrence immédiate, pour tout $k\in[\![1,2n]\!]$ et tout $t\in[-1,1]$,

$$f^{(k)}(t)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\circ h(t).$$

Ainsi, en particulier,

$$\forall t\in[-1,1],\quad f^{(2n)}(t)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} g^{(2n)}\left(\frac{a+b}{2}+t\cdot\frac{b-a}{2}\right).$$

Or, pour tout $t\in[-1,1]$, $\frac{a+b}{2}+t\cdot\frac{b-a}{2}\in[a,b]$, donc $\left|g^{(2n)}\left(\frac{a+b}{2}+t\cdot\frac{b-a}{2}\right)\right|\leqslant M_{2n}(g)$, par définition de cette quantité. Ainsi

$$\forall t\in[-1,1],\quad |f^{(2n)}(t)|\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}M_{2n}(g).$$

De plus, $M_{2n}(g)$ étant le maximum de $|g^{(2n)}|$ sur $[a,b]$, il existe $t_0\in[a,b]$ tel que $g^{(2n)}(t_0)=M_{2n}(g)$. Soit alors x_0 l'unique réel de $[-1,1]$ (h étant une bijection de $[-1,1]$ sur $[a,b]$) tel que $h(x_0)=t_0$. On obtient donc

$$|f^{(2n)}(x_0)|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}|g(h(x_0))|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}|g(t_0)|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}|M_{2n}(g)|.$$

Ainsi, $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}M_{2n}(g)$ est un majorant de $|f^{(2n)}|$ sur $[-1,1]$ et il est atteint en une certaine valeur, $x_0\in[-1,1]$. C'est donc le maximum de $|f^{(2n)}|$ sur cet intervalle. Ainsi :

$$M_{2n}(f)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}M_{2n}(g).$$

(b) D'après III-2(d), on a :

$$\left|\int_{-1}^{1}f(t)\ \mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(r_j)\right|\leqslant\frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2}\cdot\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

d'où, en multipliant par $\frac{b-a}{2}$ et en utilisant la relation entre les intégrales de f et de g donnée dans l'énoncé (changement de variable),

$$\left|\int_a^b g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} - r_j\cdot\frac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2}\cdot\frac{2^{2n}(b-a)}{(2n+1)!}.$$

Enfin, d'après la question III-3(a), on obtient :

$$\left|\int_a^b g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} - r_j\cdot\frac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_{2n}(g)}{\binom{2n}{n}^2}\cdot\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Partie IV – Étude d'un cas particulier

1. • On a :
   * $P_2 = (X^2-1)^2$,
   * $P_2' = 4X(X^2-1) = 4X^3 - 4X$,
   * $P_2'' = 4(3X^2-1)$
   • Ainsi, les racines de P_2'' sont $r_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   • On en déduit :
   * $L_1 = \frac{X-r_2}{r_1-r_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}$. Ainsi :

   $$\lambda_1 = \int_{-1}^1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{t}{2}\right]_{-1}^1 = 1.$$

   * De même, $L_2 = \frac{X-r_1}{r_2-r_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}$, et

   $$\lambda_2 = \int_{-1}^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}t = 1.$$

2. Ainsi, d'après le résultat de la question III-3(b) appliqué avec $n=2$, g étant bien de classe $\mathcal{C}^4$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right| \\ = \left|\int_a^b g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^2 \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} - r_j\cdot\frac{b-a}{2}\right)\right| \\ \leqslant \frac{M_4(g)}{\binom{4}{2}^2}\cdot\frac{(b-a)^5}{5!} = \frac{M_4(g)}{36}\cdot\frac{(b-a)^5}{120} = \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}.\end{aligned}$$

3. On pose pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, $d_k = a + k\cdot\frac{b-a}{p}$, et pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, c_k le milieu de l'intervalle $[d_{k-1},d_k]$, c'est-à-dire $c_k = \frac{d_k+d_{k+1}}{2}$. Ainsi, en appliquant le résultat de la question précédente à l'intervalle $[d_{k-1},d_k]$, on obtient

$$\left|\int_{d_{k-1}}^{d_k} g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{d_k-d_{k-1}}{2}\left(g\left(c_k - \frac{d_k-d_{k-1}}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{d_k-d_{k+1}}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4(g)(d_k-d_{k-1})^5}{4320}.$$

Or, $d_k - d_{k-1} = \dfrac{b-a}{p}$, d'où, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$:

$$\left|\int_{d_{k-1}}^{d_k} g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^5}.$$

En utilisant la relation de Chasles (remarquez que $d_0 = a$ et $d_p = b$) et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \\
&\qquad = \left|\sum_{k=1}^{p}\left(\int_{d_{k-1}}^{d_k} g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right)\right| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\left(\int_{d_{k-1}}^{d_k} g(u)\ \mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right)\right| \\
&\qquad \leqslant p \cdot \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^5} = \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320p^4},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de la question précédente.

4. (a) La fonction g est la composée de la fonction polynomiale $x \mapsto -x^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[-1,0]$, et de la fonction $y \mapsto e^y$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,0]$. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

(b) Un peu de calcul : fastidieux mais sans difficulté.
- $\forall x \in [-1,1],\quad g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$,
- $\forall x \in [-1,1],\quad g''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$,
- $\forall x \in [-1,1],\quad g^{(3)}(x) = (-8x^3+4x+8x)\mathrm{e}^{-x^2} = (-8x^3+12x)\mathrm{e}^{-x^2}$,
- $\forall x \in [-1,1],\quad g^{(4)}(x) = (16x^4-24x^2-24x^2+12)\mathrm{e}^{-x^2} = (16x^4-48x^2+12)\mathrm{e}^{-x^2}$.

(c) Ici, on prend $a=-1$ et $b=1$. On peut donc expliciter c_k :

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\quad c_k = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2(k-1)}{p} - 1 + \frac{2k}{p}\right) = \frac{2k-1-p}{2p}.$$

D'autre part, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$16x^4 - 48x^2 + 12 \geqslant 12 - 48x^2 \geqslant 12 - 48 \geqslant -36 \qquad \text{et} \qquad 16x^4 - 48x^2 + 12 \leqslant 16x^4 + 12 \leqslant 28 \leqslant 36.$$

Ainsi, puisque $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$, on en déduit que pour tout $x \in [-1,1]$, $|g^{(4)}(x)| \leqslant 36$, donc $M_4(g) \leqslant 36$. Ainsi, l'inégalité de la question IV-3 devient :

$$\left|\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(\frac{2k-1-p}{2p} - \frac{1}{p\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{2k-1-p}{2p} + \frac{1}{p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \leqslant \frac{36\cdot 2^5}{4320p^4} = \frac{36}{135p^4}.$$

(d) Pour que la somme soit une valeur approchée de l'intégrale à ε près, il suffit que $\dfrac{36}{135p^4} \leqslant \varepsilon$, donc que $p^4 \geqslant \frac{36}{135\varepsilon}$, donc que $p \geqslant \sqrt[4]{\frac{36}{135\varepsilon}}$. On peut donc prendre

$$p = E\left(\sqrt[4]{\frac{36}{135\varepsilon}}\right) + 1,$$

où E désigne la partie entière.

Cela donne le fragment de programme suivant (on n'écrit que la procédure demandée, et les éventuelles fonctions et procédures nécessaires à son fonctionnement). Nous répondons à la question telle qu'elle est posée. Il serait cependant plus logique d'écrire une fonction plutôt qu'une procédure pour ce calcul de valeur approchée, le but étant le calcul d'une valeur numérique.

```
function g(x:real):real;
  begin
    g:= exp(-x*x);
  end;

function h(k,p:integer):real;    {FONCTION TERME GÉNÉRAL DE LA SOMME}
```

```
    begin
      h:=g((2*k-1-p)/(2*p)-1/(p*sqrt(3)))+g((2*k-1-p)/(2*p)+1/(p*sqrt(3)));
    end;

  procedure calc_int(err:real; var I:integer);
    var k,p:integer;
    begin
      p:= int(sqrt(sqrt(36/(135*err))))+1;  {BORNE D'ARRÊT}
      I:=0;                              {INITIALISATION DE LA SOMME}
      for k:=1 to p do
        I:=I+h(k,p);                     {AJOUT DES TERMES LES UNS APRÈS LES AUTRES}
      I:=I/p;
    end;
```