Devoir Surveillé N° 7

Algèbre Linéaire

Polynômes, EV & Matrices

Durée : 4 heures

Exercice 1 — (Rang). Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de M en fonction de m.

2) Dans cette question, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice M. On suppose en outre que : $m = 1$.

   a) Préciser le rang de f, ainsi que la dimension du noyau de f.

   b) Déterminer une base de l'image de f, ainsi qu'une base de son noyau.

Exercice 2 — (Sev de matrices). Dans $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$, on considère la partie F constituée des matrices M telles que :

1/ la somme des coefficients de la deuxième colonne de M est égale au double de la somme des coefficients de sa première colonne ;

2/ la somme des coefficients de la troisième colonne de M est égale à trois fois la somme des coefficients de sa première colonne ;

3/ la somme des coefficients de la quatrième colonne de M est égale à quatre fois la somme des coefficients de sa première colonne ;

4/ la somme des coefficients de la cinquième colonne de M est égale à cinq fois la somme des coefficients de sa première colonne.

Etablir que F est un sev de $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ de dimension 21.

Problème 1 — (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$).

L'objectif de ce problème est d'étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Les trois premières parties sont des applications très classiques du cours. Les deux dernières parties expliquent les choix faits dans la première moitié du problème.

Dans ce problème, on note $\mathrm{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note également : $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

➤ Partie A - Etude d'un endomorphisme.

Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$f(P) = (2X+1)\,P - (X^2-1)\,P'$$

1/ Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

2/ Désormais on note f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (2X+1)\,P - (X^2-1)\,P' \end{aligned}$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3/ Ecrire la matrice $A = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f)$ de f dans la base B.

4/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

5/ Etablir que l'équation

$$(\mathrm{E}) : \qquad P + P' = X^2 P' - 2XP$$

admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme nul.

➤ Partie B - Etude des éléments invariants par f.

On s'intéresse dans cette partie au sev de $\mathbb{R}_2[X]$ constitué des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ laissés invariants par f, c'est à dire tels que :

$$\ker(f - \mathrm{id}) = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P\}$$

A cette fin, on pose : $g = f - \mathrm{id}$.

6/ Ecrire la matrice $C = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(g)$ de g dans la base B.

7/ Déterminer le rang de la matrice C.

8/ Déterminer $\mathrm{Im}\ g$ et $\ker g$, en précisant une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

9/ Calculer C^2. L'endomorphisme g est-il un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?

10/ Etablir que : $\mathbb{R}_2[X] = \ker g \bigoplus \mathrm{Im}\ g$.

➤ Partie C - Changement de base.

On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

11/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

12/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

13/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}. *

14/ Ecrire la matrice $A' = \mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f)$ de f dans la base B'. †

15/ En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme $S \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul, tel que $f(S) = 3S$. Donner un exemple d'un tel polynôme S.

16/ Soit n un entier naturel. Préciser l'expression de A'^n, ainsi que le lien entre A^n et A'^n.

➤ Partie D - Origine de B′.

Dans la partie précédente, on a introduit une base B' dans laquelle la matrice de f est diagonale (càd "particulièrement simple"). Comme vous vous en doutez, cette base n'a pas été choisie au hasard, et la méthode générale pour la déterminer relève du programme de Spé.

Néanmoins, il existe dans le cas particulier de cet exercice d'autres méthodes pour expliquer l'origine de la base B', uniquement basées sur des connaissances de Sup. L'objectif des parties D et E est précisément de présenter ces méthodes.

On reprend ici la notation de la partie B : $g = f - \mathrm{id}$.

17/ Montrer que $\mathrm{Im}\,(g)$ est stable par f, c'est à dire que : $f\left(\mathrm{Im}\,(g)\right) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.

18/ On note $\varphi = f_{|\mathrm{Im}\,(g)}$. D'après la question précédente, φ induit un endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(g)$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Im}\,(g) &\longrightarrow \mathrm{Im}\,(g) \\ P &\longmapsto f(P) \end{aligned}$$

a/ Expliciter une base B_0 de $\mathrm{Im}\,(g)$. ‡

b/ Ecrire la matrice $U = \mathrm{M}_{B_0}(\varphi) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de φ dans la base B_0.

c/ Soit λ un réel. Etablir que :

$$\left[\exists\, P \in \mathrm{Im}\,(g) \setminus \{0\}\,,\ \varphi(P) = \lambda P\right] \Longleftrightarrow \left[\det\left(U - \lambda \mathrm{I}_2\right) = 0\right]$$

d/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\det\left(U - \lambda \mathrm{I}_2\right) = 0$.

---

*. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4} R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

†. On pourra vérifier que A' est une matrice diagonale.

‡. Le cas échéant, vous pouvez utiliser ce que vous avez fait au cours de la partie B.

➤ Partie E - Origine de B′ (alternative).

19/ **Deux propriétés générales des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$.**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, et soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels deux à deux distincts. On suppose qu'il existe trois polynômes non nuls P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\varphi(P) = \lambda_1 P\,; \qquad \varphi(Q) = \lambda_2 Q\,; \qquad \varphi(R) = \lambda_3 R$$

a/ Etablir que la famille $F = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b/ Montrer que : $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longleftrightarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$

20/ Soit λ un réel, et soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Etablir que $f(P) = \lambda P$ si et seulement si P est solution de l'équation différentielle $(x^2 - 1)\, y' - (2x + 1 - \lambda)\, y = 0$.

21/ On note (E_λ) l'équation différentielle : $(x^2 - 1)\, y' - (2x + 1 - \lambda)\, y = 0$.

a/ Résoudre l'équation différentielle (E_λ) sur l'intervalle $I = \,]\,1; +\infty\,[$.[§]

b/ Montrer qu'il existe une fonction polynomiale non nulle solution de (E_λ) sur $]\,1; +\infty\,[$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; 1; 3\}$.

Fin

CORRIGE

Exercice 1 — **(Rang).** Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

1) Puisque le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur ses lignes[*] :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$= 2 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ m-1 & 1-m \end{pmatrix} \qquad \text{D'où : } \boxed{\mathrm{rg}(M) = \begin{cases} 3 \text{ si } m = 1 \\ 4 \text{ si } m \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{cases}}$$

2) On suppose donc : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) D'après la question précédente : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$. D'après le théorème du rang : $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) = 1}$.

b) On a : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3, C_4)$ où les C_i désignent les vecteurs colonnes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Clairement : $C_4 = C_1 + C_2$. D'où : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3)}$. La famille (C_1, C_2, C_3) étant génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et de cardinal égal à sa dimension, c'en est une base.

On déduit également de la relation $C_4 = C_1 + C_2$ que $f\,(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_4) = 0$. D'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Comme on sait par ailleurs que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle (2-a), on peut conclure :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

[*]. Et ses colonnes.

Exercice 2 — (Matrices "fun").

Pour tout entier $j \in [\![1, 5]\!]$, notons f_j l'application :

$$f_j : \mathrm{M}_5(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \sum_{i=1}^{5} a_{ij}$$

Une matrice A étant donnée, le réel $f_j(A)$ est donc la somme des coefficients de sa j-ème colonne. Il est immédiat que f_j est linéaire. Posons à présent :

$$\forall A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = \begin{pmatrix} f_2(A) - 2f_1(A) \\ f_3(A) - 3f_1(A) \\ f_4(A) - 4f_1(A) \\ f_5(A) - 5f_1(A) \end{pmatrix}$$

L'application φ est clairement linéaire, et par définition de F, on a : $F = \ker \varphi$.

En outre, on a : $\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varphi(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varphi(E_{14}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varphi(E_{15}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que φ est surjective, puisque l'image de φ est un sev qui contient une base de $\mathbb{R}^4$ (d'après ce qui précède).

D'après le théorème du rang, on a donc : $\dim \ker \varphi = \mathrm{M}_5(\mathbb{R}) - \mathrm{rg}\varphi = 25 - 4$, soit $\dim \ker \varphi = 21$.

Conclusion : F est un sev de $\mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ de dimension 21.

Problème 1 — (Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$). .

1/ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe trois réels a, b et c tels que : $P = aX^2 + bX + c$. On a alors :

$$f(P) = (2X+1)\left(aX^2+bX+c\right) - \left(X^2-1\right)(2aX+b)$$

$$\Longleftrightarrow f(P) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c - 2aX^3 - bX^2 + 2aX + b$$

$$\Longleftrightarrow f(P) = (a+b)\,X^2 + (2a+b+2c)\,X + c + b \in \mathbb{R}_2[X]$$

Par suite : $\boxed{\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_2[X].}$

2/ D'après la question 1, on a : $f(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. L'application f est donc bien définie. Montrons sa linéarité : soient P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, et soient λ et μ deux réels. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (2X+1)(\lambda P + \mu Q) - \left(X^2-1\right)(\lambda P + \mu Q)'$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda\,(2X+1)\,P + \mu\,(2X+1)\,Q - \left(X^2-1\right)(\lambda P' + \mu Q')$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda\,(2X+1)\,P + \mu\,(2X+1)\,Q - \lambda\left(X^2-1\right)P' - \mu\left(X^2-1\right)Q'$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda\left[(2X+1)\,P - \left(X^2-1\right)P'\right] + \mu\left[(2X+1)\,Q - \left(X^2-1\right)Q'\right]$$

$$\Longleftrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Il s'ensuit que f est linéaire. $\boxed{\textbf{Conclusion} : f \in \mathscr{L}(R_2[X])}$.

3/ On a : $f(1) = 2X+1$ et $f(X) = \left(2X^2+X\right) - \left(X^2-1\right) = X^2 + X + 1$.

En outre : $f\left(X^2\right) = \left(2X^3 + X^2\right) - \left(2X^3 - 2X\right) = X^2 + 2X$.

On en déduit que : $\boxed{A = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

4/ On a : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car de déterminant non nul, donc : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(f) = 3$. En particulier l'endomorphisme f est surjectif, et puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

5/ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P + P' = X^2P' - 2XP \iff (2X+1)\,P - (X^2-1)\,P' = 0 \iff f(P) = 0 \iff P \in \ker f \iff P = 0$$

(la dernière équivalence provenant du fait que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$).

Conclusion : l'équation $P + P' = X^2P' - 2XP$ admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme nul.

➤ Partie B - Etude des éléments invariants par f.

6/ On a : $C = \mathrm{M_B}(g) = \mathrm{M_B}(f - \mathrm{id}) = A - \mathrm{I}_3$. D'où : $\boxed{C = \mathrm{M_B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

7/ On a : $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'où : $\boxed{\mathrm{rg}(C) = 2}$

8/ D'après la question précédente, on a : $\mathrm{rg}(g) = 2$. Donc, d'après le théorème du rang : $\dim\ker(g) = 1$.

De plus, d'après la question 6 : $\mathrm{Im}\ (g) = \mathrm{Vect}\,(2X, X^2+1)$. †. D'où : $\mathrm{Im}\ (g) = \mathrm{Vect}\,(X, X^2+1)$. La famille (X, X^2+1) est une base de $\mathrm{Im}\ g$, puisqu'elle est génératrice et de cardinal égal à la dimension de $\mathrm{Im}\ (g)$.

Toujours d'après la question 6, on a : $g(1) = g(X^2)$. Il s'ensuit que $X^2 - 1$ appartient à $\ker g$. Puisque $\ker g$ est une droite vectorielle, on a : $\ker g = \mathrm{Vect}\,(X^2-1)$. ‡

Conclusion. $\dim \mathrm{Im}\ (g) = 2$ et $\mathrm{Im}\ (g) = \mathrm{Vect}\,(X, X^2+1)$; $\dim\ker(g) = 1$ et $\ker(g) = \mathrm{Vect}\,(X^2-1)$.

9/ On a : $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où : $\boxed{C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

Puisque $C^2 \neq C$, on a $g^2 \neq g$. Ainsi : $\boxed{g \text{ n'est pas un projecteur de } \mathbb{R}_2[X]}$.

10/ On a : $\ker(g) + \mathrm{Im}\ (g) = \mathrm{Vect}\,(X, X^2+1, X^2-1)$. Montrons que la famille $\mathscr{B} = (X, X^2+1, X^2-1)$ est libre. A cette fin, on suppose qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha X + \beta\,(X^2+1) + \gamma\,(X^2-1) = 0 \qquad (\spadesuit)$$

Par évaluation en 0, on obtient : $\beta - \gamma = 0$.

Par évaluation en 1, on obtient : $\alpha + 2\beta = 0$.

Par évaluation en -1, on obtient : $-\alpha + 2\beta = 0$.

On en déduit immédiatemment que α, β et γ sont nuls. Ce qui prouve que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Puisque le cardinal de $\mathscr{B}$ est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En particulier : $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B})$ d'où : $\mathbb{R}_2[X] = \ker(g) + \mathrm{Im}\ (g)$.

Par ailleurs, d'après le théorème des quatre dimensions :

$\dim(\ker(g) \cap \mathrm{Im}\ (g)) = \dim\ker(g) + \dim \mathrm{Im}\ (g) - \dim(\ker(g) + \mathrm{Im}\ (g))$ d'où : $\dim(\ker(g) \cap \mathrm{Im}\ (g)) = 0$.

On en déduit que : $\ker(g) \cap \mathrm{Im}\ (g) = \{0\}$.

En résumé : $\mathbb{R}_2[X] = \ker(g) + \mathrm{Im}\ (g)$ et $\ker(g) \cap \mathrm{Im}\ (g) = \{0\}$. Par suite : $\boxed{\mathbb{R}_2[X] = \ker(g) \bigoplus \mathrm{Im}\ (g)}$.

†. L'image de g est le sev engendré par les images par g de 1, X et X^2, dont les coordonnées sont données par les colonnes de la matrice C.

‡. En particulier, le singleton $\{X^2 - 1\}$ est une base de $\ker g$.

➤ Partie C - Changement de base.

11/ Montrons que la famille $\mathrm{B}' = \left(X^2-1, (X-1)^2, (X+1)^2\right)$ est libre. A cette fin, on suppose qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$\alpha\left(X^2-1\right)+\beta\left(X-1\right)^2+\gamma\left(X+1\right)^2=0 \qquad (\spadesuit)$$

Par évaluation en -1, on obtient : $\beta=0$.

Par évaluation en 1, on obtient : $\gamma=0$. On en déduit alors que : $\alpha=0$. Ce qui prouve que la famille B' est libre. Puisque le cardinal de B' est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Conclusion : la famille $\mathrm{B}' = \left(X^2-1, (X-1)^2, (X+1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

12/ La matrice de passage de la base B à la base B' est : $\boxed{P = P_{\mathrm{BB}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

13/ On a : $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y+z=b_1 \\ -2y+2z=b_2 \\ x+y+z=b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y+z-b_1 \\ -2y+2z=b_2 \\ 2y+2z=b_1+b_3 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x=y+z-b_1 \\ 4y=b_1-b_2+b_3 \\ 4z=b_1+b_2+b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=(b_3-b_1)/2 \\ y=(b_1-b_2+b_3)/4 \\ z=(b_1+b_2+b_3)/4 \end{cases}$$

On en déduit que : $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

14/ D'après la formule du changement de base : $\mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f) = P_{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f)\,P_{\mathrm{BB}'}$. Avec les notations de l'énoncé, on a donc : $A' = P^{-1}AP$.

Ainsi : $A' = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Conclusion : $A' = \mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15/ D'après la question précédente : $\boxed{f\left((X+1)^2\right) = 3\left(X+1\right)^2}$.

16/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{A'^n = \mathrm{diag}\left(1, (-1)^n, 3^n\right) \text{ et } A^n = PA'^nP^{-1}.}$

➤ Partie D - Origine de B′.

17/ On peut observer que f commute avec g, puisque : $f\circ g = f\circ(f-\mathrm{id}) = f^2 - f = (f-\mathrm{id})\circ f = g\circ f$. Il s'ensuit que : $\boxed{f\left(\mathrm{Im}\,(g)\right) \subset \mathrm{Im}\,(g)}$.

18/ a/ D'après la question 8 : $\boxed{\text{une base de Im } g \text{ est } B_0 = (X, X^2+1)}$.

b/ On a : $\varphi(X) = f(X) = 1+X+X^2 = X+(X^2+1)$ et $\varphi(X^2+1) = f(X^2+1) = 1+4X+X^2 = 4X+(X^2+1)$.

On en déduit que : $\boxed{U = \mathrm{M}_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

c/ Soit λ un réel. On a :

$$[\exists\, P \in \text{ Im } (g)\backslash \{0\}\,,\ \varphi(P) = \lambda P] \iff [\ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \neq \{0\}] \iff [\varphi - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \text{ non injective}]$$

$$\iff [\varphi - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \text{ non bijective}] \iff [U - \lambda\, \mathrm{I}_2 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})] \iff [\det(U - \lambda \mathrm{I}_2) = 0]$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ [\exists\, P \in \text{ Im } (g)\backslash \{0\}\,,\ \varphi(P) = \lambda P] \iff [\det(U - \lambda \mathrm{I}_2) = 0]}$.

d/ On a : $[\det(U - \lambda \mathrm{I}_2) = 0] \iff \left[\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0\right] \iff \left[(1-\lambda)^2 - 4 = 0\right]$

$$\iff [\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0] \iff [(\lambda+1)(\lambda-3) = 0].$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ [\det(U - \lambda \mathrm{I}_2) = 0] \iff [(\lambda = -1) \vee (\lambda = 3)]}$.

➤ Partie E - Origine de B′ (alternative).

19/ a/ Supposons qu'il existe trois réels α_1, α_2 et α_3 tels que : $\alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R = 0 \quad (\spadesuit)$.

Alors : $\varphi(\alpha_1 P + \alpha_2 Q + \alpha_3 R) = 0$. D'où : $\alpha_1\lambda_1 P + \alpha_2\lambda_2 Q + \alpha_3\lambda_3 R = 0$.

En soustrayant à cette relation l'égalité $\lambda_1\,(\spadesuit)$, on obtient :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\, Q + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\, R = 0 \ \ (\heartsuit)$$

D'où : $f(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\, Q + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\, R) = 0$

$\iff \alpha_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\, Q + \alpha_3\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1)\, R = 0$

En soustrayant à cette relation l'égalité $\lambda_2\,(\spadesuit)$, on obtient : $\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)\, R = 0$.

Le polynôme R étant non nul, on en déduit que : $\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$. Les réels λ_i étant supposés deux à deux distincts, on en déduit que : $\alpha_3 = 0$. Ce résultat et la relation $(\heartsuit)$ donnent $\alpha_2 = 0$, puis on obtient $\alpha_1 = 0$ à l'aide de la relation $(\spadesuit)$.

Ainsi la famille $F = (P, Q, R)$ est libre, et puisque $\mathrm{Card}(F) = \dim \mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure.

Conclusion. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, et soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels deux à deux distincts. On suppose qu'il existe trois polynômes non nuls P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\varphi(P) = \lambda_1 P\,; \qquad \varphi(Q) = \lambda_2 Q\,; \qquad \varphi(R) = \lambda_3 R$$

Alors la famille (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b/ ➤ Sens direct : supposons que $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'un des λ_i soit nul. SNALG, on peut supposer que $\lambda_1 = 0$. Alors il existe un polynôme P non nul tel que $\varphi(P) = 0$, ce qui entraîne que φ n'est pas injective, donc pas bijective : contradiction.

Par conséquent, tous les λ_i sont non nuls. On a établi que : $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longrightarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$.

➤ Réciproque : supposons que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Soit S un polynôme appartenant au noyau de φ. Puisque F est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe trois réels a, b et c tels que : $S = aP+bQ+cR$. D'où : $\varphi(S) = a\lambda_1 P+b\lambda_2 Q+c\lambda_3 R$. Comme $S \in \ker\varphi$ et que la famille F est libre, on en déduit que : $a\lambda_1 = b\lambda_2 = c\lambda_3 = 0$.

Les λ_i étant non nuls, on en déduit finalement que : $a = b = c = 0$. Par suite, $S = 0$. D'où : $\ker\varphi = \{0\}$, et φ est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ce qui montre : $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longleftarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$.

Conclusion. $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longleftrightarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$.

20/ Soit λ un réel, et soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$[f(P) = \lambda P] \Longleftrightarrow [(2X+1)P - (X^2-1)P' = \lambda P] \Longleftrightarrow [(2X+1-\lambda)P - (X^2-1)P' = 0]$$

$$\Longleftrightarrow [(X^2-1)P' - (2X+1-\lambda)P = 0]$$

Conclusion. $f(P) = \lambda P$ SSI P est solution de l'équation différentielle $(x^2-1)y' - (2x+1-\lambda)y = 0$.

21/ a/ D'après le cours, la solution générale de (E_λ) sur I est : $\forall x \in I,\ f_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où C est un réel et A désigne une primitive de b/a sur I (b/a désignant la fonction : $x \in I \longmapsto \dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1}$).

On a par exemple (à une constante d'intégration près) :

$$\forall x \in I,\ A(x) = \int \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x\lambda}{x^2-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\lambda}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1-\lambda}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

D'où : $\forall x \in I,\ A(x) = \ln(x^2-1) + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$

D'où : $\boxed{\forall x \in I,\ f_H(x) = C\,(x^2-1)\,(x-1)^{(1-\lambda)/2}\,(x+1)^{(\lambda-1)/2} = C\,(x-1)^{(3-\lambda)/2}\,(x+1)^{(\lambda+1)/2}}$.

b/ La fonction $x \longmapsto C\,(x-1)^{(3-\lambda)/2}\,(x+1)^{(\lambda+1)/2}$ est polynomiale et non nulle si et seulement si les exposants $(3-\lambda)/2$ et $(\lambda+1)/2$ sont entiers naturels, ce qui ce produit si et seulement si :

$$[\frac{3-\lambda}{2} \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{\lambda+1}{2} \in \mathbb{N}] \Longleftrightarrow [\lambda \text{ entier impair, } 3-\lambda \geqslant 0,\ \lambda+1 \geqslant 0] \Longleftrightarrow [\lambda \in \{-1;1;3\}]$$

Conclusion. Il existe une fonction polynomiale non nulle solution de (E_λ) sur $]\,1;+\infty\,[$ si et seulement si $\lambda \in \{-1;1;3\}$.

Remarque. Pour $C = 1$, on obtient comme solution particulière $(x-1)^2$ pour $\lambda = -1$, (x^2-1) pour $\lambda = 1$, et $(x+1)^2$ pour $\lambda = 3$.