Simulation DS N° 7

Algèbre Linéaire

Polynômes, EV & Matrices

Centrale MP **Mathématiques 1** ***Calculatrices autorisées*** **2019**

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et $\mathrm{M}^\top$ ont même spectre.
2. Montrer que $\mathrm{M}^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$\mathrm{C_Q} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de $\mathrm{C_Q}$.

4. Soit λ une valeur propre de $\mathrm{C_Q}^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C. Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
10. Montrer que $\mathrm{X}^p + \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

1. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det\left((XI_n - M)^\top\right) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{M^\top}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{sp}\left(M^\top\right)$$

Ainsi $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}\left(M^\top\right)$ et donc $\boxed{\text{M et } M^\top \text{ ont même spectre}}$

2. <u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que M est diagonalisable.
Ceci q nous fournit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$
donc $M^\top = \left(P^{-1}\right)^\top D^\top P^\top = \left(P^\top\right)^{-1} DP^\top$ d'où $M^\top$ est diagonalisable
<u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que $M^\top$ est diagonalisable.
Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = \left(M^\top\right)^\top$.
On a bien montré que $\boxed{M^\top \text{ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable}}$

I.B. Matrices compagnons

3. On a $\chi_{C_Q}(X) = \det\left(XI_n - C_Q\right) = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$

On effectue alors les opérations élémentaires pour i allant de $n-1$ à 1 : $L_i \longleftarrow L_i + XL_{i+1}$:

$$\chi_{C_Q}(X) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q(X) \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_2X + a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & X^2 + a_{n-1}X + a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe ensuite selon la première ligne pour obtenir :

$$\chi_{C_Q}(X) = (-1)^{n+1}Q(X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}Q(X)(-1)^{n-1}$$

Ainsi $\boxed{\text{Q est le polynôme caractéristique de } C_Q}$

4. On a $(C_Q)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

   On a $\chi_{C_Q{}^\top} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$(C_Q)^\top X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & -\dots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (C_Q)^\top X = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in [\![2,n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1}x_1 \\ Q(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

   Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

   Comme λ est racine de Q, alors $\boxed{\dim\left(E_\lambda\left(C_Q{}^\top\right)\right) = 1,\ E_\lambda\left(C_Q{}^\top\right) = \text{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}}$

I.C. Endomorphismes cycliques

5. $\Rightarrow$: On suppose que f est cyclique.
   Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E
   Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$
   Je pose alors $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-\lambda_i)X^i \in \mathbb{K}[X]$
   de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$

   $\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n
   Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}$
   donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

   > f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n

6. $\Leftarrow$: On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
   Ainsi $|\text{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$
   donc f est diagonalisable d'après le cours

$\Leftarrow$: On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,
ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{C}_{\mathrm{Q}}$ d'après 5.
Ainsi C_{Q} est diagonalisable et il en est de même pour ${\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}$ d'après 2
Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right)$ d'où $n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right)} \dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right)\right)$
or on a $\forall \lambda \in \mathrm{sp}\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right),\ \dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right)\right) = 1$ d'après 4 donc $\left|\mathrm{sp}\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right)\right| = n$
or d'après 1 : $\mathrm{sp}\left({\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}}^{\top}\right) = \mathrm{sp}\left(\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}\right) = \mathrm{sp}(f)$
donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$
donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples
Ainsi $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et a toutes ses racines simples}}$

7. On suppose que f est cyclique.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. Montrons $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E
donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}(x) = 0_{\mathrm{E}}$
ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre
Alors $\boxed{(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(\mathrm{E})}$

Je note d le degré de π_f. D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$.
Or $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geqslant n$
de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f
d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leqslant \deg(\chi_f) = n$
ainsi $n = d$ d'où $\boxed{\text{le polynôme minimal de } f \text{ est de degré } n}$

*On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe **I.D** qui suit.*

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. On note $\mathrm{N}_x = \left\{m \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant m-1} \text{ libre}\right\}$.
On sait que $1 \in \mathrm{N}_x$ car $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ et que $\forall m \geqslant n,\ m \notin \mathrm{N}_x$ car $\dim \mathrm{E} = n$
Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$
donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre et la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est liée

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a bien l'existence de } p \in \mathbb{N}^* \text{ et de } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que la famille} \\ (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre et } \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0\end{array}}$$

9. On a $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) = \mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^p(x))$ car f linéaire
or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) + \cdots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
d'où $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) \subset \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f}$

10. Je note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$
    D'après ce qui précède $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est une base de $\operatorname{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$
    On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = \mathrm{C}_{\mathrm{Q}}$ en notant $\mathrm{Q} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{X} + \cdots + \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \mathrm{X}^p$
    d'où $\chi_{\tilde{f}} = \mathrm{Q}$ or $\chi_{\tilde{f}} | \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f
    On a montré que $\boxed{\mathrm{X}^p + \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \text{ divise le polynôme } \chi_f}$
11. En reprenant les notations précédentes, on a $\mathrm{Q}(f)(x) = 0$ et il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{PQ} = \chi_f$
    Ainsi $\chi_f(f) = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{Q}(f)$ donc $\chi(f)(x) = \mathrm{P}(f)\left[\mathrm{Q}(f)(x)\right] = \mathrm{P}(f)(0) = 0$ car $\mathrm{P}(f)$ linéaire
    On a ainsi montré que : $\forall x \in \mathrm{E},\ \chi(f)(x) = 0$
    or $\chi(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'où $\boxed{\chi_f(f) \text{ est l'endomorphisme nul}}$

Fin