Devoir Maison N° 1

Logie
Sommes

Exercice 1 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{12} 4$ **2.** $81 + 85 + 89 + 93 + \cdots + 405$ **3.** **4.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$

Exercice 2 (Une inéquation) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+8} \geqslant x + 2$.

Exercice 3 (Encore des sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} k^3 - \sum_{i=3}^{98} (i+1)^3$ **2.** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$

Exercice 4 (Une récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 5 (Des négations) Pour chacune des assertions, écrire sa négation puis préciser si l'assertion est vraie en justifiant.

1. $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0, +\infty[, -x < y < x$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m^2 > 2017n$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 9 \Rightarrow x > 3)$.

Exercice 6 (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel positif ou nul. On appelle racine n-ième de x, noté $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ l'unique réel positif ou nul r tel que $r^n = x$. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors on a*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$, et le réel $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ est appelé moyenne géométrique de $x_1, \ldots, x_n$.

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

2. On note m la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.
Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 1 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=3}^{12} 4 = 4 \times (12 - 3 + 1) = 40$

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^4)^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{16})^i \\ &= \frac{1}{2}\frac{1/16 - (1/16)^{n+1}}{1 - 1/16} \\ &= \frac{1}{30}(1 - (1/16)^n)\end{aligned}$$

3. $301 + 304 + 307 + \cdots + 739 + 742 = \sum_{k=100}^{247}(3k+1) = \frac{(301+742)}{2} \times 148$. C'est une somme arithmétique de raison 3 avec 148 termes.

Exercice 2 (Une inéquation) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+8} \geqslant x+2$.

Remarquons déjà que l'inéquation que l'on appelle (E) est définie pour $x \geqslant -8$.

- Si $x \in [-8, -2]$, alors $x + 2 \leqslant 0$ et donc $\sqrt{x+8} \geqslant x+2$ car une racine carrée est toujours positive ou nulle. Ainsi l'intervalle $[-8, -2]$ est solution.
- Si $x > -2$. Alors $x + 2 > 0$. L'inéquation (E) est donc équivalente (si $a, b \geqslant 0$, on a $(a \leqslant b \iff a^2 \leqslant b^2)$) à

$$\begin{aligned} x+8 \geqslant (x+2)^2 &\iff x+8 \geqslant x^2+4x4 \\ &\iff x^2+3x-4 \leqslant 0 \\ x \in [-4, 1] \end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait que -4 et 1 sont les racines du trinôme $X^2 - 3X + 4$.

Puisque dans ce cas $x > -2$, l'intervalle $]-2, 1]$ est solution.

- Conclusion : les solutions de (E) sont :

$$[-8,-2] \cup]-2,1] = [-8,1].$$

Exercice 3 (Encore des sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

1. On fait dans la deuxième somme le changement de variable $k = i+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{100} k^3 - \sum_{i=3}^{98} (i+1)^3 &= \sum_{k=5}^{100} k^3 - \sum_{k=4}^{99} (k)^3 \\
&= \sum_{k=5}^{99} k^3 + 100^3 - (\sum_{k=5}^{99} (k)^3 + 4^3) \\
&= 100^3 - 4^3 = 1000000 - 64 \\
&= 999936.
\end{aligned}$$

2. C'est une somme double sur un domaine triangulaire. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} i = \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Une récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1$ et $(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$.

Supposons que c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^n (n+1)}{2}(n - 2(n+1)) = \frac{(-1)^n (n+1)}{2}(-n-2) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que c'est vrai pour $n+1$.

Exercice 5 (Des négations) Pour chacune des assertions, écrire sa négation puis préciser si l'assertion est vraie en justifiant.

1. P : $\forall x \in]-1,1[, \exists y \in]-1,1[, y < x$.

non P : $\exists x \in]-1,1[, \forall y \in]-1,1[, y \geqslant x$.

P est vraie. En effet, soit $x \in]-1,1[$. On pose $y = \frac{-1+x}{2} \in]-1,1[$, c'est la moyenne de -1 et x. On a $y < x$.

2. P : $\forall x \in [0,+\infty[, x^2 \geqslant x \geqslant 0$.

non P : $\exists x \in [0,+\infty[, x^2 < x \quad \text{ou} \quad x < 0$.

P est fausse car si P était vraie pour $x = \frac{1}{2}$, on aurait $x^2 \geqslant x$, donc $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est faux.

3. P : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \implies (x = 0)]$.

non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \quad \text{et} \quad (x \neq 0)]$.

Montrons que P est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$. Supposons par l'absurde que $x \neq 0$. Alors en prenant $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, on a $|x| < \frac{|x|}{2}$ et donc $1 < \frac{1}{2}$. Contradiction.

Exercice 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \; B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $f(x)$, exprimer le résultat en fonction de A, B et C.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (x^2 a_k^2 + b_k^2 + 2x a_k b_k) \\ &= x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k) \\ &= Ax^2 + 2xC + B \end{aligned}$$

2. En déduire de l'étude du signe de f, l'inégalité demandée.

Si tous les a_k sont nuls, alors l'inégalité est vraie car elle devient $0 \leqslant 0$.

Sinon, il existe au moins un des a_k qui est non nul et alors la somme $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ est strictement positive, en particulier non nulle. La fonction f est donc une fonction polynomiale du second degré, qui est toujours positive ou nulle, car $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$ est une somme de carrés, donc de nombres positifs ou nuls. Le discriminant Δ de f vérifie donc $\Delta \leqslant 0$. En effet, si $\Delta > 0$, alors f s'annule deux fois et change de signe. Or on a $\Delta = 4C^2 - 4AB$, ce qui donne, $C^2 \leqslant AB$ et donc par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{C^2} \leqslant \sqrt{A}\sqrt{B}$. Comme $\sqrt{C^2} = |C|$, on obtient bien le résultat.

3. Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

On pose pour $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = \sqrt{k}$ et $b_k = 1$. On a alors le résultat par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\
&= \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} \\
&= n\sqrt{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$