Devoir Maison N° 10

Équations Différentielles

Exercice — (EDL1). Déterminer toutes les fonctions f de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle :

$$(E_1) : \qquad y' + y = \mathrm{A}\ \mathrm{e}^t \cos(\omega t) \qquad \text{(avec A et } \omega \text{ réels strictement positifs)}$$

- Problème 1 — Sur les équations différentielles linéaires d'ordre 3 -

Dans ce problème, on étudie les EDL d'ordre 3 à coefficients constants. Au cours de la première partie, on établit des propriétés générales de ces EDL analogues à celles vues en cours dans le cadre des EDL d'ordres 1 et 2. La seconde partie est consacrée à l'étude d'un exemple, c'est à dire à la résolution d'une EDL3 dans un cas particulier.

➤ Partie 1 - Généralités sur les EDL3.

Dans cette partie, on s'intéresse à une équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont des réels, et d une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Une telle équation sera appellée *équation différentielle linéaire d'ordre 3* (et plus rapidement notée EDL3).

Par analogie avec ce que vous connaissez sur les EDL2, on appellera *équation homogène associée à (E)* l'EDL3 sans second membre :

$$(H) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

Enfin, on appellera *équation caractéristique* associée à (H) l'équation :

$$(EC) \qquad X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

1/ **Structure de l'ensemble des solutions**. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ solution de l'équation différentielle (E). Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Etablir que f est solution de (E) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (H).

2/ **Recherche d'une solution particulière de (E), avec second membre du type "$\mathrm{e}^{\alpha x}$"**. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un nombre (réel ou complexe donc). On s'intéresse dans cette question à l'équation :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

a/ Montrer que si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution "de la forme $K\mathrm{e}^{\alpha x}$", c'est à dire plus précisément qu'il existe un scalaire* K tel que la fonction f_P définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

est solution de (E).

b/ On suppose dans cette question que† :

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\,; \qquad 3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0\,; \qquad \text{et} \qquad 6\alpha + 2a = 0$$

Montrer que (E) admet une solution "de la forme $Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$", c'est à dire plus précisément qu'il existe un scalaire K tel que la fonction f_P définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_P(x) = Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$$

est solution de (E).

3/ **Principe de superposition des solutions**. Démontrer l'énoncé ci-dessous :

Propriété. Soient $d_1, \ldots, d_n$ n fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que :

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = d_i$.

Alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{la fonction } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \text{ est solution de l'équation différentielle } y''' + ay'' + by' + cy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i.$$

∗. On appelle **scalaire** un élément de $\mathbb{K}$; le mot "scalaire" est donc synonyme de "nombre réel ou complexe".

†. Dans ce contexte, on dira que α est **racine triple** de l'équation caractéristique.

A partir de maintenant, on fixe dans ce problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

En particulier, lorsque l'on demandera de résoudre une équation différentielle, il s'agira de trouver les solutions de cette équation différentielle à valeurs réelles.

➤ Partie 2 - Résolution d'une EDL3

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\,; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$$

On note par ailleurs :

$$(H1) \qquad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

5/ Vérifier que g_1 est solution de $(H1)$.

6/ Vérifier que g_2 est solution de $(H1)$.

On admettra par la suite que g_3 est également solution de $(H1)$.

7/ Justifier que pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

8/ Le but de la fin de cette partie est d'établir que la réciproque de l'assertion obtenue dans la question précédente est vraie, c'est à dire que toute solution de $(H1)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions g_1, g_2 et g_3. ‡

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, solution de (H_1).

a/ On pose : $g = f'' + 4f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(H_2) \qquad y' + y = 0$$

b/ Donner la solution générale de l'équation différentielle (H_2) (*il n'est pas indispensable de détailler cette question*).

c/ Résoudre l'équation différentielle : $(H_3) \qquad y'' + 4y' + 5y = 0$.

d/ Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) \qquad y'' + 4y' + 5y = \lambda \mathrm{e}^{-x}$.

e/ Conclure, en donnant la solution générale de $(H1)$ (réponse à justifier très soigneusement).

9/ Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E_2) :

$$(E_2) \qquad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 102\,\mathrm{ch}(2x)$$

‡. Une **combinaison linéaire** des fonctions g_1, g_2 et g_3 est précisément une fonction de la forme $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$, où les λ_i désignent des nombres réels.

CORRIGE

Exercice — **(EDL1).** Déterminons toutes les fonctions f de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : (E_1) : $y' + y = \mathrm{A}\ \mathrm{e}^t \cos(\omega t)$ (avec A et ω réels strictement positifs).

Puisque les coefficients et le second membre de l'équation différentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et que la fonction "a" ne s'annule pas (elle est constante égale à 1) sur $\mathbb{R}$, on peut effectivement résoudre l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$.

L'équation homogène associée à (E_1), qui est $y'+y=0$, ne nécessite pas une très longue étude... La solution générale de $y'+y=0$ est : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_H(t) = K\mathrm{e}^{-t}$ (avec $K \in \mathbb{R}$) (♠).

On se propose de déterminer une solution particulière de (E_1) par la méthode de variation de la constante. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_P(t) = K(t)\mathrm{e}^{-t}$ où K désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Sous cette hypothèse, la fonction f_P est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout t réel : ${f_P}'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(K'(t) - K(t)\right)$.

On en déduit que pour tout réel t on a :

$$ {f_P}'(t) + f_P(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(K'(t) - K(t)\right) + K(t)\mathrm{e}^{-t} = K'(t)\mathrm{e}^{-t} $$

Par conséquent, la fonction f_P est solution de (E_1) SSI pour tout réel t on a : $K'(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{A}\mathrm{e}^t\cos(\omega t)$. En résumé :

$$ [f_P \text{ est solution de } (E_1)] \Longleftrightarrow [\forall t \in \mathbb{R},\ K'(t) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{2t}\cos(\omega t)] $$

Reste donc à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction (continue sur $\mathbb{R}$) qui à tout réel t associe $\mathrm{e}^{2t}\cos(\omega t)$. Cela peut se faire par exemple comme suit :

$$ \int \mathrm{e}^{2t}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left[\int \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right] = \mathrm{Re}\left[\int \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2+\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i}\omega)t}\right] $$

$$ = \mathrm{Re}\left[\frac{2-\mathrm{i}\omega}{4+\omega^2}\,\mathrm{e}^{2t}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)\right] = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4+\omega^2}\ \left(2\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right) $$

On en déduit que la fonction $f_P : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t}}{4+\omega^2}\ \left(2\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right)$ est solution de l'équation (E_1).

Conclusion. La solution générale de (E_1) est :

$$ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left(\frac{\mathrm{A}}{4+\omega^2}\ \left(2\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right) + K\right)\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{(avec } K \in \mathbb{R} \text{ arbitraire)} $$

- Problème 1 — Sur les équations différentielles linéaires d'ordre 3 -

➤ Partie 1 - Généralités sur les EDL3.

Dans cette partie, on s'intéresse à une équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont des réels, et d une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Une telle équation sera appellée *équation différentielle linéaire d'ordre 3* (et plus rapidement notée EDL3).

1/ Avec les notations et sous les hypothèses de l'énoncé :

f est solution de (E)

$\Longleftrightarrow \forall x \in I, \qquad f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = d(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in I, \qquad f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \varphi'''(x) + a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x \in I, \qquad f'''(x) - \varphi'''(x) + a\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) + b\left(f'(x) - \varphi'(x)\right) + c\left(f(x) - \varphi(x)\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall x \in I, \qquad (f-\varphi)'''(x) + a(f-\varphi)''(x) + b(f-\varphi)'(x) + c(f-\varphi)(x) = 0$ *(linéarité de la dérivation)*

$\Longleftrightarrow (f-\varphi)$ est solution de (H)

Conclusion. $[f$ est solution de $(E)] \Longleftrightarrow [(f-\varphi)$ est solution de $(H)]$.

En d'autres termes, et avec les notations précédemment introduites, toute solution f de (E) s'écrit $f_H + f_P$ où f_H (resp. f_P) désigne une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) (resp. une solution particulière de (E)).

2/ a/ On s'intéresse dans cette question à l'équation : $(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

On suppose que α n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on définit une fonction f_P en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et on a pour tout réel x :

$$f'_P(x) = \alpha K\mathrm{e}^{\alpha x}\,; \qquad f''_P(x) = \alpha^2 K\mathrm{e}^{\alpha x}\,; \qquad f'''_P(x) = \alpha^3 K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Ainsi, pour tout réel x on a : $f'''_P(x) + af''_P(x) + bf'_P(x) + cf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c\right)$.

Or, α n'étant pas racine de l'équation caractéristique, on a : $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$.

On en déduit que f_P est solution de l'équation (E) si et seulement si : $K = \dfrac{1}{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}$.

Conclusion. Lorsque α n'est pas racine de l'équation caractéristique, la fonction

$$f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

est (une) solution de l'EDL3 : $\qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha x}$

b/ On suppose à présent que α est racine triple de l'équation caractéristique, càd :

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\,(\spadesuit)\,; \qquad 3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0\,(\heartsuit)\,; \qquad 6\alpha + 2a = 0\,(\clubsuit)$$

On définit une fonction f_P en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et on a pour tout réel x :

$$f'_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha x^3 + 3x^2\right)\,;\ f''_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2x^3 + 6\alpha x^2 + 6x\right)\,;\ f'''_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^3x^3 + 9\alpha^2x^2 + 18\alpha x + 6\right)$$

Ainsi, pour tout réel x on a :
$f'''_P(x) + af''_P(x) + bf'_P(x) + cf_P(x)$

$$= K\mathrm{e}^{\alpha\, x}\,(\alpha^3x^3 + 9\alpha^2x^2 + 18\alpha x + 6 + a\alpha^2x^3 + 6a\alpha x^2 + 6ax + b\alpha x^3 + 3bx^2 + cx^3).$$

Soit encore : $f'''_P(x) + af''_P(x) + bf'_P(x) + cf_P(x)$

$$= K\mathrm{e}^{\alpha\, x}\left[x^3\left(\underbrace{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}_{=0 \text{ d'après } (\spadesuit)}\right) + x^2\left(\underbrace{9\alpha^2 + 6a\alpha + 3b}_{=0 \text{ d'après } (\heartsuit)}\right) + x\left(\underbrace{18\alpha + 6a}_{=0 \text{ d'après } (\clubsuit)}\right) + 6\right].$$

On en déduit que f_P est solution de l'équation (E) si et seulement si : $K = \dfrac{1}{6}$.

Conclusion. Lorsque α est racine triple l'équation caractéristique, la fonction

$$f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}\,x^3\mathrm{e}^{\alpha\, x}$$

est (une) solution de l'EDL3 : $\qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$.

3/ **Principe de superposition des solutions**.

Propriété. Soient $d_1, \ldots,\ d_n$ n fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soient $f_1, \ldots,\ f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^3\,(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que :
$\forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = d_i$.
Alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

la fonction $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de l'équation différentielle $\displaystyle y''' + ay'' + by' + cy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i$.

Prouvons la propriété. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)''' + a\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)'' + b\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)' + c\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i''' + a\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i'' + b\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'_i + c\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(f_i''' + af_i'' + bf_i' + cf_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i d_i$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y''' + ay'' + by' + cy = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ce qui prouve le principe de superposition des solutions pour les EDL3.

➤ Partie 2 - Résolution d'une EDL3

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\,; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$$

On note par ailleurs :

$$(H1) \qquad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

5/ La fonction g_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel x on a :

$$g_1{}'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\,; \qquad g_1{}''(x) = \mathrm{e}^{-x}\,; \qquad g_1{}'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

On en déduit que pour tout réel x : $g'''_1(x) + 5g''_1(x) + 9g'_1(x) + 5g_1(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1+5-9+5) = 0$.

Conclusion. La fonction g_1 est solution de (H_1).

6/ La fonction g_2 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel x on a :

$g_2{}'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-\sin(x) - 2\cos(x))$

$\Longrightarrow g_2{}''(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-\cos(x) + 2\sin(x) + 2\sin(x) + 4\cos(x)) = \mathrm{e}^{-x}(4\sin(x) + 3\cos(x))$

$\Longrightarrow g_2{}'''(x) = \mathrm{e}^{-2x}(4\cos(x) - 3\sin(x) - 8\sin(x) - 6\cos(x)) = \mathrm{e}^{-x}(-2\cos(x) - 11\sin(x))$

On en déduit que pour tout réel x : $g'''_2(x) + 5g''_2(x) + 9g'_2(x) + 5g_2(x)$

$$= \mathrm{e}^{-2x}(-2\cos(x) - 11\sin(x) + 20\sin(x) + 15\cos(x) - 9\sin(x) - 18\cos(x) + 5\cos(x)) = 0.$$

Conclusion. La fonction g_2 est solution de (H_1).

7/ Puisque g_1, g_2 et g_3 sont solutions de la même EDL3 $(H1)$ (qui est sans second membre), il résulte du principe de superposition (question 3) que toute combinaison linéaire de g_1, g_2 et g_3 est solution de (H_1).

Conclusion. Pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

8/ a/ Sous réserve que f soit une solution de $(H1)$, et en posant $g = f'' + 4f' + 5f$, on a :

$$g' + g = f''' + 4f'' + 5f' + f'' + 4f' + 5f = f''' + 5f'' + 9f' + 5f = 0$$

Conclusion. $[f$ solution de $(H1)] \Longrightarrow [(f'' + 4f' + 5f)$ solution de $y' + y = 0]$.

b/ La solution générale de $y' + y = 0$ est : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = K\mathrm{e}^{-x}$ (avec K réel arbitraire).

c/ L'équation $y'' + 4y' + 5y = 0$ est une EDL2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée $X^2 + 4X + 5 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées : $-2 \pm \mathrm{i}$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 4y' + 5y = 0$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\, \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires)}$$

d/ Soit λ un réel arbitraire.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{-x}$.

La fonction f_P est solution de $(E1)$ si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{-x}(1 - 4 + 5) = \lambda \mathrm{e}^{-x}$.

Par suite, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-x}$ est une solution de $(E1)$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 4y' + 5y = \lambda \mathrm{e}^{-x}$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-x} + (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\, \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires)}$$

e/ Notons S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H_1), et E l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions g_1, g_2 et g_3.

Il résulte de la question précédente que $S \subset E$, et de la question 7 que $E \subset S$. Par suite $E = S$.

En d'autres termes, la solution générale de (H_1) est :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_H(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} \cos(x) + C_3 \mathrm{e}^{-2x} \sin(x) \text{ (avec } C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ réels)}}$$

9/ Résolvons l'équation (E_2) $\qquad y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 102\ \mathrm{ch}(2x)$.

➤ La question précédente donne la solution générale de l'équation homogène associée à cette équation.

➤ Par ailleurs, pour tout réel x, on a : $102\ \mathrm{ch}(2x) = 51\mathrm{e}^{2x} + 51\mathrm{e}^{-2x}$. Pour trouver une solution particulière de (E_2), on peut utiliser le principe de superposition (question 3). De plus, les réels 2 et -2 n'étant pas racines de l'équation caractéristique, la question 2-a permet d'affirmer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ (*resp.* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = -51\mathrm{e}^{-2x}$)

est solution de $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 51\mathrm{e}^{2x}$ (*resp.* $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 51\mathrm{e}^{-2x}$)

Conclusion. La solution générale de $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 102\ \mathrm{ch}(2x)$ est :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 51\mathrm{e}^{-2x} + C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} \cos(x) + C_3 \mathrm{e}^{-2x} \sin(x) \text{ (avec } C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ réels)}$$