Devoir Maison N° 11

Polynômes

Problème : Polynômes de Tchebychev et calcul de $\zeta(2)$

Partie I : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. (a) Calculer P_2 et P_3.
   (b) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. (a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire les valeurs de $\widetilde{P_n}(1)$ et $\widetilde{P_n'}(1)$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer les racines réelles de P_n.

Partie II : Calcul de $\zeta(2)$

L'objectif de cette partie est d'établir la convergence et de calculer la limite de la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. (a) Réaliser, dans $\mathbb{R}(X)$, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)}$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que la suite (S_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. On introduit $S_n' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.
   (a) Former une relation exprimant S_{2n}, S_n et S_n'.
   (b) En déduire que la suite (S_n') converge et exprimer sa limite ℓ' en fonction de ℓ.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et, pour $k \in \{1, \cdots n\}$, $x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.
   (a) Montrer que $\frac{P_n'}{P_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = n^2$, puis calculer la valeurs des sommes
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}.$$
   (c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
   (d) En déduire un encadrement de S_n' puis les valeurs de ℓ' et ℓ.

Partie I : Polynômes de Tchebychev de première espèce

1. (a) Un simple calcul donne $\boxed{P_2 = 2X^2 - 1}$ et $\boxed{P_3 = 4X^3 - 3X}$.

   (b) On montre, par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{P}(n)$: " $\deg(P_n) = n$ et $\mathrm{coeff}(P_n) = 2^{n-1}$ ".

   — $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

   — Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé de sorte que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire $\deg(P_n) = n$, $\deg(P_{n+1}) = n+1$, $\mathrm{coeff}(P_n) = 2^{n-1}$ et $\mathrm{coeff}(P_{n+1}) = 2^n$. On écrit $P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$ avec $\deg(Q) \leqslant n$.
   Ainsi,
   $$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2^{n+1}X^{n+2} + \underbrace{(2XQ - P_n)}_{\text{de degré } \leqslant n+1}.$$
   Par conséquent, $\deg(P_{n+2}) = n+2$ et $\mathrm{coeff}(P_{n+2}) = 2^{n+1}$.

   La récurrence double est achevée et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \deg(P_n) = n \text{ et } \mathrm{coeff}(P_n) = 2^{n-1}}$.

   De plus, $\boxed{\deg(P_0) = 1 \text{ et } \mathrm{coeff}(P_0) = 1}$.

2. (a) On montre, par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ".

   — $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

   — Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé de sorte que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire $\widetilde{P_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $\widetilde{P_{n+1}}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$.
   Nous avons
   $$\begin{aligned}
   \widetilde{P_{n+2}}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\widetilde{P_{n+1}}(\cos(\theta)) - \widetilde{P_n}(\cos(\theta)) \\
   &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
   &= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\
   &= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) \\
   &= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
   &= \cos((n+2)\theta)
   \end{aligned}$$

   On a donc prouvé $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \theta \in \mathbb{R},\ \widetilde{P_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$.

   (b) En choisissant $\theta = 0$ dans la relation précédente, on trouve $\boxed{\widetilde{P_n}(1) = 1}$.

   En dérivant, par rapport à θ la relation précédente, on trouve $-\sin(\theta)\widetilde{P_n}'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$.
   Ainsi,
   $$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \widetilde{P_n}'(\cos(\theta)) = n^2\ \frac{\sin(n\theta)}{n\theta} \times \frac{\theta}{\sin(\theta)}.$$
   Or $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$ donc $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{\sin(n\theta)}{n\theta} \times \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1$.

   Par continuité de la fonction $\widetilde{P_n'}$ en 0, on obtient en faisant tendre θ vers 0^+, $\boxed{\widetilde{P_n'}(1) = n^2}$.

   (c) — P_n est de degré n, donc admet, au plus, n racines.

— On pose, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, $x_k = \cos\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. D'après la relation de la question 2.(a), nous avons $\widetilde{P_n}(x_k) = 0$.

— $\cos_{|[0,\pi]}$ est injective donc les réels $x_1, \cdots, x_n$ sont deux à deux distincts donc sont au nombre de n.

$\boxed{P_n \text{ admet exactement } n \text{ racines réelles données par } \cos\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in \{1, \cdots, n\}}$.

Partie II : Calcul de $\zeta(2)$

1. (a) $\boxed{\frac{1}{X(X-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1}}$.

   (b) Par télescopage, nous obtenons $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}}$.

   Pour tout $k \geqslant 2$ alors $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}}$.

   (c) — $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+2)^2} > 0$ donc la suite (S_n) est strictement croissante.

   — D'après la question précédente, la suite (S_n) est majorée par 2.

   Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ converge}}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par regroupement par paquets,

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + S'_n$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S'_n = S_{2n} - \frac{1}{4} S_n}$.

   (b) (S_{2n}) est une sous-suite de (S_n) donc converge vers ℓ. Ainsi, $\boxed{(S'_n) \text{ converge vers } \frac{3}{4}\ell}$.

3. (a) Comme $x_1, \cdots, x_n$ sont les n racines (simples) de P_n alors

$$P_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

   Ainsi,

$$P'_n = 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - x_k).$$

   Ainsi,

$$\frac{P'_n}{P_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - x_k)}{\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)}$$

   Puis $\boxed{\frac{P'_n}{P_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}}$.

(b) En évaluant la relation précédente en 1, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} = \frac{\widetilde{P_n}'(1)}{\widetilde{P_n}(1)} = n^2}$.

Comme $\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}{2}$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2}$.

Comme $\frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = -1 + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = -n + 2n^2}$.

(c) — Soit $x \in [0, \pi/2]$. $0 \leqslant \sin(x)$ est immédiat.

— sin est concave sur $[0, \pi/2]$ donc sa courbe représentative est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.
D'où, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\sin(x) \leqslant x$.

— tan est convexe sur $[0, \pi/2[$ donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
D'où, pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan(x) \geqslant x$.

On a donc prouvé que $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$.

(d) Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\frac{(2k-1)\pi}{4n} \in [0, \pi/2[$ donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} \leqslant \frac{1}{\frac{(2k-1)^2\pi^2}{16n^2}} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)}.$$

Cela permet d'en déduire que $2n^2 - n \leqslant \frac{16n^2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqslant 2n^2$ puis $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16n} \leqslant S'_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}$.

Le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \frac{\pi^2}{8}$ $(= \ell')$. On en déduit que $\boxed{\ell = \frac{\pi^2}{6}}$.