Devoir Maison N° 12

Matrices

Problème 2 — (Définition matricielle du corps des nombres complexes).

Préambule

Les nombres complexes ont été introduits dans les mathématiques il y a environ quatre siècles, dans les travaux de Jérôme Cardan[*] et Raphaël Bombelli[†]. Pour faire court, ces deux mathématiciens ont défini le nombre i *comme une solution de l'équation $x^2 = -1$, et c'est cette définition qui a traversé les âges pour intervenir encore dans votre cours de Terminale.*

Mais une autre approche des nombres complexes aurait été possible, en utilisant le calcul matriciel. Cette approche constitue l'objet du présent problème, dont le but est d'essayer de vous convaincre que l'on aurait pu définir les nombres complexes autrement. Explicitement, au lieu de voir ici un complexe comme un nombre s'écrivant $a + \mathrm{i}b$, on définira un complexe comme une matrice de la forme $a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$ (où I est la matrice identité I_2, et J une matrice telle que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$).

L'intérêt de cette approche est géométrique, dans un sens qui sera rendu explicite dans la dernière partie de ce problème.

L'ensemble des "nombres complexes" que nous définirons dans cet énoncé sera donc un ensemble de matrices, et les différentes parties de ce problème auront pour but de prouver que toutes les propriétés que vous avez vues dans le chapitre "Complexes" de cette année s'adaptent à notre nouveau point de vue.

Pour finir, n'ayez pas peur de ce saut dans l'inconnu ! Un grand nombre des questions de ce problème vous paraîtront évidentes dès lors que vous avez bien révisé votre cours sur les complexes, le calcul matriciel et les groupes... Enfin, les différentes parties de ce problème ne sont pas du tout indépendantes ; mais vous pouvez bien entendu utiliser les résultats d'une question dans une autre.

Notations

Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra se convaincre aisément que $\boxed{\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I} \quad (\bigstar)}$.

On définit les deux sous-ensembles $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\widehat{\mathbf{C}}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en posant :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \{a\mathrm{I} \,/\, a \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathbf{C}} = \left\{a\mathrm{I} + b\mathrm{J} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

càd :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / \, a \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathbf{C}} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / \, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On pourra observer que $\widehat{\mathbf{R}} \subsetneq \widehat{\mathbf{C}}$.

Pour tout couple (a,b) de nombres réels, on notera $Z(a,b)$ l'élément $a\mathrm{I} + b\mathrm{J} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\widehat{\mathbf{C}}$.

On notera encore : $\overline{Z(a,b)} = Z(a,-b)$.

Enfin, pour tout élément $Z(a,b)$ de $\widehat{\mathbf{C}}$ on définit son **module** en posant : $|Z(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$.

---

* Qui n'était pas biélorusse

➤ Partie A - Quelques propriétés algébriques de $\widehat{\mathbf{R}}$ et de $\widehat{\mathbf{C}}$

1) Justifier brièvement que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \widehat{\mathbf{R}} \\ x &\longmapsto Z(x,0) \end{aligned}$$

est une bijection.

2) Montrer que $\left(\widehat{\mathbf{C}},+\right)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$. En déduire que $\left(\widehat{\mathbf{C}},+\right)$ est un groupe abélien.

3) Montrer que $\left(\widehat{\mathbf{R}},+\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbf{C}},+\right)$. En déduire que $\left(\widehat{\mathbf{R}},+\right)$ est un groupe abélien.

4) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}$. Vérifier que : $Z(a,b) + \overline{Z(a,b)} = 2a\mathrm{I}$ et $Z(a,b) - \overline{Z(a,b)} = 2b\mathrm{J}$.

5) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Calculer : $Z(a,b) \times Z(a',b')$.

6) Soient x un réel et $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}$. Vérifier que : $Z(x,0) \times Z(a,b) = Z(xa,xb)$.

7) Propriétés du module.

   a) Soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}$. Montrer que : $Z(a,b) \times \overline{Z(a,b)} = |Z(a,b)|^2 \times \mathrm{I}$.

   b) Montrer que :
   $$\forall\ (Z(a,b), Z(a',b')) \in \widehat{\mathbf{C}}^2,\ |Z(a,b) \times Z(a',b')| = |Z(a,b)| \times |Z(a',b')|$$

   c) Soit $Z(a,b)$ un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |Z(a,b)^n| = |Z(a,b)|^n$.

➤ Partie B - Les corps $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\widehat{\mathbf{C}}$

8) Le corps $\widehat{\mathbf{R}}$.

   a) Montrer que le produit matriciel (la loi "$\times$") est une LCI sur $\widehat{\mathbf{R}}$. Justifier brièvement que cette LCI possède un élément neutre dans $\widehat{\mathbf{R}}$, et est commutative.

   Par la suite, on pourra admettre que la loi $\times$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et que pour tout $Z(x,0)$ dans $\widehat{\boldsymbol{R}}$ on a : $\mathbb{Z}(x,0) \times 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \times Z(x,0)$. Les propriétés énoncées ci-dessus permettent alors d'affirmer que $\left(\widehat{\boldsymbol{R}},+,\times\right)$ est un anneau commutatif.

   b) Montrer que l'anneau $\left(\widehat{\mathbf{R}},+,\times\right)$ est intègre, et que tout élément non nul de $\left(\widehat{\mathbf{R}},+,\times\right)$ est inversible[‡] dans $\widehat{\mathbf{R}}$.

9) Le corps $\widehat{\mathbf{C}}$.

   a) Montrer que le produit matriciel (la loi "$\times$") est une LCI sur $\widehat{\mathbf{C}}$.

   b) Justifier brièvement que cette LCI possède un élément neutre dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

   Par la suite, on pourra admettre que la loi $\times$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et que pour tout $Z(a,b)$ dans $\widehat{\boldsymbol{C}}$ on a : $\mathbb{Z}(a,b) \times 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \times Z(a,b)$. Les propriétés énoncées ci-dessus permettent alors d'affirmer que $\left(\widehat{\boldsymbol{C}},+,\times\right)$ est un anneau.

   c) Montrer que l'anneau $\left(\widehat{\mathbf{C}},+,\times\right)$ est commutatif.

‡. Pour la loi $\times$.

d) Montrer que tout élément non nul de $\mathbf{C}$ est inversible[§] dans $\mathbf{C}$.

e) Déduire de ce qui précède que l'anneau $\left(\widehat{\mathbf{C}},+,\times\right)$ est intègre, puis que l'anneau $\left(\widehat{\mathbf{C}},+,\times\right)$ est un corps.

f) Soit $Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}$, avec $Z(a,b)\neq \mathrm{I}$. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} Z(a,b)^k = \left(\mathrm{I}-Z(a,b)^{n+1}\right)\times\left(\mathrm{I}-Z(a,b)\right)^{-1}$$

➤ Partie C - Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on pose :

$$\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} = Z(\cos\theta,\sin\theta) \qquad \text{càd} \qquad \mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

10) Vérifier que pour tout réel θ on a : $\left|\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\right|=1$.

11) Montrer que pour tout couple $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$ on a : $\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\times\mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}}=\mathrm{E}^{(\theta+\varphi)\mathrm{J}}$.

12) Montrer que pour tout réel θ on a : $\left(\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\right)^{-1}=\mathrm{E}^{(-\theta)\mathrm{J}}$.[¶]

13) Justifier que pour tout couple $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$ on a : $\left[\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}=\mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}}\right]\Longleftrightarrow[\theta=\varphi\ \ [2\pi]]$.

➤ Partie D - Forme exponentielle d'un élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$

A partir de maintenant, on note $\widehat{\mathbf{C}}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\widehat{\mathbf{C}}$, càd : $\widehat{\mathbf{C}}^*=\widehat{\mathbf{C}}\setminus\left\{0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.

14) Soit $Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on exprimera en fonction de a et b tels que :

$$Z(a,b)=|Z(a,b)|\times Z(\alpha,\beta)$$

15) Avec les notations de la question précédente, vérifier que : $\alpha^2+\beta^2=1$.

16) En déduire que pour tout $Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}^*$, il existe un réel θ tel que

$$Z(a,b)=|Z(a,b)|\times\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}$$

Par la suite, ce réel θ sera appelé **argument** de $Z(a,b)$, et il sera noté : $\mathrm{ARG}\,(Z(a,b))$.

17) **Méthode d'identification dans $\widehat{\mathbf{C}}^*$**. Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer que

$$(Z(a,b)=Z(a',b'))\Longleftrightarrow\begin{cases}|Z(a,b)|=|Z(a',b')|\\[2ex] \mathrm{ARG}\,(Z(a,b))=\mathrm{ARG}\,(Z(a',b'))\quad[2\pi]\end{cases}$$

18) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Montrer que :

$$\mathrm{ARG}\,(Z(a,b)\times Z(a',b'))=\mathrm{ARG}\,(Z(a,b))+\mathrm{ARG}\,(Z(a',b'))$$

A ce point du raisonnement, on peut alors démontrer toutes les propriétés algébriques attendues des arguments (celles concernant l'argument du conjugué, de l'inverse, d'un quotient). On n'en démontre qu'une seule (question suivante) qui sera d'une importance capitale pour la suite des évènements.

---

§. Pour la loi $\times$.

¶. On a également $\left(\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\right)^{-1}=\overline{\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}}$, mais on ne demande pas de vérifier cette dernière relation.

19) Soit $Z\left(a,b\right) \in \widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{ARG}\left(Z(a,b)^n\right) = n\mathrm{ARG}\left(Z\left(a,b\right)\right)$

➤ Partie E - Racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$

20) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^2 = \mathrm{I}$.[‖]

21) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^2 = -\mathrm{I}$.

22) Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation $X^4 = \mathrm{I}$.

23) Soit à présent $Z\left(a,b\right) \in \widehat{\mathbf{C}}^*$. Montrer que l'équation $X^2 = Z(a,b)$ admet exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ (*que l'on pourra appeler racines carrées de* $Z\left(a,b\right)$ *dans* $\widehat{\mathbf{C}}$).

24) **Application**. Déterminer les racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, càd déterminer toutes les matrices $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que $X^2 = A$.

➤ Partie F - Equations du second degré dans $\widehat{\mathbf{C}}$

Soient A, B et C dans $\widehat{\mathbf{C}}$, avec $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Dans cette partie on notera (E) l'équation suivante d'inconnue $X \in \widehat{\mathbf{C}}$:

$$(E) : \qquad AX^2 + BX + C = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$$

On appelle **discriminant de l'équation** (E) l'élément de $\widehat{\mathbf{C}}$ défini en posant

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

25) Etablir que l'équation (E) possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ lorsque $\Delta \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$; et exactement une solution dans $\widehat{\mathbf{C}}$ lorsque $\Delta = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Dans les deux cas, on explicitera la ou les solutions.

26) **Application**. Résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$ l'équation :

$$X^2 - 2\mathrm{J}X - \mathrm{J} = \mathrm{I}$$

➤ Partie G - Racines n-ièmes de l'unité dans $\widehat{\mathbf{C}}$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{ Z\left(a,b\right) \in \widehat{\mathbf{C}} \ / \ Z(a,b)^n = \mathrm{I} \right\}$$

et on note $\widehat{\mathbf{U}}$ l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathbf{C}}$ de module égal à 1, soit :

$$\widehat{\mathbf{U}} = \left\{ Z\left(a,b\right) \in \widehat{\mathbf{C}} \ / \ |Z(a,b)| = 1 \right\}$$

Dans les questions de cette partie, n désigne un entier naturel $n \geqslant 2$.

27) Soit n un entier naturel $n \geqslant 2$. Etablir que : $\widehat{\mathbf{U}}_n \subset \widehat{\mathbf{U}}$.

28) Etablir que $\left(\widehat{\mathbf{U}}_n, \times\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbf{U}}, \times\right)$.

‖. On cherchera donc tous les $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ tels que $X^2 = \mathrm{I}$. Indication : on pourra utiliser une identité remarquable, et utiliser le fait que $\widehat{\mathbf{C}}$ est en particulier un anneau intègre.

29) Montrer que : $\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{ \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}} \;/\; k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!] \right\}$.

30) Montrer que : $\displaystyle\sum_{W \in \widehat{\mathbf{U}}_n} W = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

31) **Application**. Déterminer toutes les matrices $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que

$$X^4 = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

➤ Partie H - Finalement

On rappelle que $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des similitudes directes du plan complexe.
On note $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ la partie de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ constituée des similitudes directes de centre O.

32) Justifier brièvement qu'un élément de $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ est une transformation f_a ayant pour écriture complexe : $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, et que $\left(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ\right)$ est un groupe abélien.

33) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}) &\longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}^* \\ f_a &\longmapsto |a|\,\mathrm{E}^{\arg(a)\,\mathrm{J}} \end{aligned}$$

est bijective.

34) Montrer que ψ est compatible avec les structures de groupes de $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ et de $\widehat{\mathbf{C}}^*$ dans le sens où :

$$\forall\ (f,g) \in \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})^2,\ \psi(f \circ g) = \psi(f) \times \psi(g)$$

Une telle application (compatible avec les lois de groupes au départ et à l'arrivée) s'appelle un morphisme de groupes. Un morphisme de groupes bijectif est appelé un isomorphisme de groupes ; enfin deux groupes G et G' sont dits isomorphes lorsqu'il existe un morphisme de groupes entre G et G'.
Dans cette dernière question, vous avez donc établi que les groupes $\left(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ\right)$ et $\left(\widehat{C}^*, \times\right)$ sont isomorphes. Cela signifie que non seulement il existe une correspondance bijective entre les éléments des ensembles $\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ et $\widehat{C}^*$, mais aussi que cette correspondance est compatible avec les LCI de ces deux groupes.

➤ Partie I - Bonus

35) Déterminer toutes les matrices $M \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que

$$(M+\mathrm{I})^5 = (M-\mathrm{I})^5$$

FIN

Problème 2 — $\boxed{\text{(Définition matricielle du corps des nombres complexes)}}$.

1) Il est immédiat que l'application $\psi : \widehat{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $Z(x,0) \in \widehat{\mathbf{R}}$ associe le réel x est telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbf{R}}}$. Il s'ensuit que $\boxed{\varphi \text{ est bijective (et } \varphi^{-1} = \psi)}$.

2) On utilise la méthode bien connue :

__**(SG1)**__ : $\widehat{\mathbf{C}} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, par définition.

__**(SG2)**__ : l'élément neutre de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +)$, qui est la matrice nulle $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, appartient à $\widehat{\mathbf{C}}$ puisque : $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} = Z(0,0)$.

__**(SG3)**__ : soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ deux éléments de $\widehat{\mathbf{C}}$. Il est clair que $Z(a,b) + Z(a',b') = Z(a+a', b+b')$. L'addition est donc une LCI sur $\widehat{\mathbf{C}}$.

__**(SG4)**__ : soit $Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}$. Son inverse pour l'addition est clairement $Z(-a,-b)$, qui est encore dans $\widehat{\mathbf{C}}$. L'ensemble $\widehat{\mathbf{C}}$ est donc stable par passage à l'inverse.

__Conclusion__ : $\left(\widehat{\mathbf{C}}, +\right)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +)$, abélien car tout sous-groupe d'un groupe abélien l'est.

3) On ré-utilise la méthode bien connue :

__**(SG1)**__ : $\widehat{\mathbf{R}} \subset \widehat{\mathbf{C}}$, par définition.

__**(SG2)**__ : l'élément neutre de $\left(\widehat{\mathbf{C}}, +\right)$, qui est la matrice nulle $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, appartient à $\widehat{\mathbf{R}}$ puisque : $0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} = Z(0,0)$.

__**(SG3)**__ : soient $Z(a,0)$ et $Z(a',0)$ deux éléments de $\widehat{\mathbf{R}}$. Il est clair que $Z(a,0) + Z(a',0) = Z(a+a',0)$. L'addition est donc une LCI sur $\widehat{\mathbf{R}}$.

__**(SG4)**__ : soit $Z(a,0) \in \widehat{\mathbf{R}}$. Son inverse pour l'addition est clairement $Z(-a,0)$, qui est encore dans $\widehat{\mathbf{R}}$. L'ensemble $\widehat{\mathbf{R}}$ est donc stable par passage à l'inverse.

__Conclusion__ : $\left(\widehat{\mathbf{R}}, +\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbf{C}}, +\right)$, abélien car tout sous-groupe d'un groupe abélien l'est.

4) Il est immédiat que : $\boxed{\forall\, Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}},\ Z(a,b) + \overline{Z(a,b)} = 2a\mathrm{I} \text{ et } Z(a,b) - \overline{Z(a,b)} = 2b\mathrm{J}}$. *

---

*. Formules à rapprocher de celles que vous connaissez dans le cadre des nombres complexes usuels : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

5) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$. On a :

$$Z(a,b)\times Z(a',b')=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-bb' & -a'b-ab' \\ a'b+ab' & aa'-bb'\end{pmatrix}=Z\left(aa'-bb',a'b+ab'\right)$$

Conclusion. $\forall\,(Z(a,b),Z(a',b'))\in\widehat{\mathbf{C}}^2,\ Z(a,b)\times Z(a',b')=Z\left(aa'-bb',a'b+ab'\right)$

6) D'après la question précédente : **Conclusion**. $\forall\,(Z(x,0),Z(a,b))\in\widehat{\mathbf{R}}\times\widehat{\mathbf{C}},\ Z(x,0)\times Z(a,b)=Z\left(xa,xb\right)$

7) Propriétés du module. a) Soit $Z\left(a,b\right)\in\widehat{\mathbf{C}}$. On a :

$$Z\left(a,b\right)\times\overline{Z\left(a,b\right)}=Z\left(a,b\right)\times Z\left(a,-b\right)=Z\left(a^2+b^2,0\right)=\left(a^2+b^2\right)Z\left(1,0\right)=\left|Z\left(a,b\right)\right|^2\times \mathrm{I}$$

Conclusion. $\forall\,Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}},\ Z\left(a,b\right)\times\overline{Z\left(a,b\right)}=\left|Z\left(a,b\right)\right|^2\times\mathrm{I}$

b) Soient $Z\left(a,b\right)$ et $Z\left(a',b'\right)$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

D'une part : $\left|Z\left(a,b\right)\times Z\left(a',b'\right)\right|=\left|Z\left(aa'-bb',a'b+ab'\right)\right|=\sqrt{\left(aa'-bb'\right)^2+\left(a'b+ab'\right)^2}$

$$=\sqrt{a^2a'^2-2aa'bb'+b^2b'^2+a'^2b^2+2aa'bb'+a^2b'^2}=\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a'^2b^2+a^2b'^2}$$

D'autre part : $\left|Z\left(a,b\right)\right|\times\left|Z\left(a',b'\right)\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a'^2+b'^2}=\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a'^2b^2+a^2b'^2}$.

Conclusion. $\forall\,\left(Z\left(a,b\right),Z\left(a',b'\right)\right)\in\widehat{\mathbf{C}}^2,\ \left|Z\left(a,b\right)\times Z\left(a',b'\right)\right|=\left|Z\left(a,b\right)\right|\times\left|Z\left(a',b'\right)\right|$

c) Soit $Z\left(a,b\right)\in\widehat{\mathbf{C}}$. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "$|Z(a,b)^n|=|Z(a,b)|^n$". L'initialisation (pour $n=0$) est immédiate puisque $\left|Z(a,b)^0\right|=|\mathrm{I}|=1$ et $|Z(a,b)|^0=1$. Reste à établir l'hérédité.

Supposons que $\mathscr{P}\left(n\right)$ soit vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$\left|Z(a,b)^{n+1}\right|=\left|Z(a,b)^n\times Z(a,b)\right|=\left|Z(a,b)^n\right|\times\left|Z(a,b)\right|=\left|Z(a,b)\right|^n\times\left|Z(a,b)\right|=\left|Z(a,b)\right|^{n+1}$$

Ainsi $\mathscr{P}\left(n+1\right)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité et achève cette récurrence.

Conclusion. $\forall\,Z\left(a,b\right)\in\widehat{\mathbf{C}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|Z(a,b)^n\right|=\left|Z(a,b)\right|^n$.

➤ Partie B - Les corps $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\widehat{\mathbf{C}}$

8) Le corps $\widehat{\mathbf{R}}$.

a) D'après la question 5 : $\forall\,\left(Z\left(x,0\right),Z\left(y,0\right)\right)\in\widehat{\mathbf{R}}^2,\ Z\left(x,0\right)\times Z(y,0)=Z\left(xy,0\right)\in\widehat{\mathbf{R}}$. Le produit matriciel est donc une LCI sur $\widehat{\mathbf{R}}$, possédant un élément neutre ($Z(1,0)=\mathrm{I}$), et évidemment commutative.

b) Soient $Z\left(x,0\right)$ et $Z\left(y,0\right)$ dans $\widehat{\mathbf{R}}$. On a : $Z\left(x,0\right)\times Z(y,0)=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ si et seulement si $xy=0$, càd si et seulement si $x=0$ ou $y=0$.

Donc : $\left[Z\left(x,0\right)\times Z\left(y,0\right)=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right]\iff\left[\left(Z(x,0)=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)\vee\left(Z(y,0)=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)\right]$

Ce qui signifie que l'anneau $\left(\widehat{\mathbf{R}},+,\times\right)$ est intègre.

Soit $Z(x,0)$ un élément non nul de $\widehat{\mathbf{R}}$. $Z(x,0)$ est trivialement inversible d'inverse $Z(1/x,0)$.

Conclusion. Puisque $\left(\widehat{\mathbf{R}},+,\times\right)$ est un anneau commutatif où tout élément non nul est inversible, on peut affirmer que $\left(\widehat{\mathbf{R}},+,\times\right)$ est un corps.

9) Le corps $\widehat{\mathbf{C}}$.

a) D'après la question 5, le produit de deux éléments de $\widehat{\mathbf{C}}$ est encore un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$. Donc le produit matriciel est une LCI sur $\widehat{\mathbf{C}}$.

b) L'élément neutre pour le produit matriciel est la matrice I_2, qui appartient à $\widehat{\mathbf{C}}$ puisque $\mathrm{I}_2=Z(1,0)$.

c) Il résulte de la question 5 que le produit matriciel dans $\widehat{\mathbf{C}}$ est commutatif.

d) Soit $Z(a,b)$ un élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$. Alors : $\det(Z(a,b)) = a^2+b^2$. D'où $\det(Z(a,b)) \neq 0$ puisque $(a,b) \neq (0,0)$ par hypothèse. Il s'ensuit que $Z(a,b)$ est inversible, d'inverse : $Z(a,b)^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\overline{Z(a,b)}$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}. \text{ Tout élément non nul de } \widehat{\mathbf{C}} \text{ est inversible dans } \widehat{\mathbf{C}}.}$

e) Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Supposons que $Z(a,b)Z(a',b') = 0$.

Distinguons deux cas. Si $Z(a,b) = 0$, l'égalité précédente est satisfaite et il n'y a plus rien à faire.

Si $Z(a,b) \neq 0$, alors d'après la question précédente $Z(a,b)$ est inversible dans $\widehat{\mathbf{C}}$. En multipliant [†] l'égalité $Z(a,b)Z(a',b') = 0$ par $Z(a,b)^{-1}$, on obtient $Z(a',b') = 0$.

En résumé : $[Z(a,b)Z(a',b') = 0] \Longrightarrow [Z(a,b) = 0 \vee Z(a',b') = 0]$. Ainsi : $\boxed{\text{l'anneau } \left(\widehat{\mathbf{C}}, +\times\right) \text{ est intègre}}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Conclusion}. \text{ Puisque } \left(\widehat{\mathbf{C}}, +, \times\right) \text{ est un anneau commutatif où tout élément non nul est inversible, on peut} \\ \text{affirmer que } \left(\widehat{\mathbf{C}}, +, \times\right) \text{ est un corps.}\end{array}}$

f) Soit $Z(a,b)$ un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$ distinct de I, et soit n un entier naturel. Puisque $\widehat{\mathbf{C}}$ est un anneau commutatif, on a :

$$(\mathrm{I} - Z(a,b)) \sum_{k=0}^{n} Z(a,b)^k = \mathrm{I} - Z(a,b)^{n+1}$$

Notons alors que $(\mathrm{I} - Z(a,b))$ est un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$, non nul par hypothèse. D'après la question précédente, il est donc inversible dans $\widehat{\mathbf{C}}$, et on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} Z(a,b)^k = \left(\mathrm{I} - Z(a,b)^{n+1}\right) \times (\mathrm{I} - Z(a,b))^{-1}}.$$

➤ PARTIE C - Notation exponentielle

10) Pour tout réel θ : $\boxed{\left|\mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}\right| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$.

11) Soient θ et φ deux réels. On a :

$\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} \times \mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}} = Z(\cos\theta, \sin\theta)\, Z(\cos\varphi, \sin\varphi) = Z(\cos\theta\cos\varphi - \sin\varphi\sin\theta, \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)$

$= Z(\cos(\theta+\varphi), \sin(\theta+\varphi))$. $\boxed{\textbf{Conclusion}. \ \forall (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} \times \mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}} = \mathrm{E}^{(\theta+\varphi)\mathrm{J}}}$.

12) Soit θ un réel. On a : $\det\left(\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\right) = 1$, donc : $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \left(\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}\right)^{-1} = \mathrm{E}^{(-\theta)\mathrm{J}}}$

13) Par définition des "matrices exponentielles", on a : $\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} = \mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}}$ si et seulement si $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$. Ces deux conditions sont simultanément satisfaites si et seulement si $\theta = \varphi\ [2\pi]$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}. \ \forall (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2,\ \left[\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}} = \mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}}\right] \Longleftrightarrow [\theta = \varphi\ \ [2\pi]]}$.

➤ PARTIE D - Forme exponentielle d'un élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$

14) Clairement : $\boxed{\forall Z(a,b) \in \widehat{\mathbf{C}}^*,\ Z(a,b) = |Z(a,b)| \times Z\left(\underbrace{\frac{a}{|Z(a,b)|}}_{=\alpha}, \underbrace{\frac{b}{|Z(a,b)|}}_{=\beta}\right)}$.

15) Par définition des réels α et β, on a : $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 1}$

†. A gauche ou à droite, cela n'a pas d'importance puisque le produit est commutatif dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

16) Puisque α et β vérifient $\alpha^2+\beta^2=1$, le couple (α,β) est celui des coordonnées d'un point du cercle trigonométrique. Il existe donc un réel θ défini modulo 2π tel que : $\alpha=\cos\theta$ et $\beta=\sin\theta$. D'où : $Z(a,b)=|Z(a,b)|\times Z(\cos\theta,\sin\theta)$ donc : $Z(a,b)=|Z(a,b)|\times \mathrm{E}^{\theta \mathrm{J}}$.

Conclusion. $\forall\, Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}^*,\ \exists\,\theta\in\mathbb{R},\ Z(a,b)=|Z(a,b)|\times\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}$.

17) **Méthode d'identification dans $\widehat{\mathbf{C}}^*$**. Soient $Z(a,b)$ et $Z(a',b')$ dans $\widehat{\mathbf{C}}^*$.

On suppose que : $Z(a,b)=Z(a',b')$. Il est immédiat que $|Z(a,b)|=|Z(a',b')|$. Il en résulte, grâce à la question précédente que : $\mathrm{E}^{\mathrm{ARG}(Z(a,b))\mathrm{J}}=\mathrm{E}^{\mathrm{ARG}(Z(a',b'))\mathrm{J}}$.

D'après la question 13, ceci implique que : $\mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)=\mathrm{ARG}\left(Z(a',b')\right)\quad[2\pi]$.

En résumé, on a établi l'implication : $(Z(a,b)=Z(a',b'))\Longrightarrow\begin{cases}|Z(a,b)|=|Z(a',b')|\\ \mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)=\mathrm{ARG}\left(Z(a',b')\right)\quad[2\pi]\end{cases}$

La réciproque est triviale.

Conclusion. $(Z(a,b)=Z(a',b'))\Longleftrightarrow\begin{cases}|Z(a,b)|=|Z(a',b')|\\ \mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)=\mathrm{ARG}\left(Z(a',b')\right)\quad[2\pi]\end{cases}$

18) Provient de la définition d'argument et de la question 11.

19) Provient de 18 et d'une récurrence immédiate sur n.

➤ Partie E - Racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$

20) Dans $\widehat{\mathbf{C}}$: $X^2=\mathrm{I}\Longleftrightarrow X^2-\mathrm{I}=0\Longleftrightarrow(X-\mathrm{I})(X+\mathrm{I})=0$.

Puisque $\widehat{\mathbf{C}}$ est un ANNEAU INTEGRE, on peut alors affirmer que : $X^2=\mathrm{I}\Longleftrightarrow X=\pm\mathrm{I}$.

Conclusion. Dans $\widehat{\mathbf{C}}$, l'équation $X^2=\mathrm{I}$ possède exactement deux solutions : $\pm\mathrm{I}$.

21) Dans $\widehat{\mathbf{C}}$: $X^2=-\mathrm{I}\Longleftrightarrow X^2+\mathrm{I}=0\Longleftrightarrow X^2-\mathrm{J}^2=0\Longleftrightarrow(X-\mathrm{J})(X+\mathrm{J})=0$.

Puisque $\widehat{\mathbf{C}}$ est un ANNEAU INTEGRE, on peut alors affirmer que : $X^2=-\mathrm{I}\Longleftrightarrow X=\pm\mathrm{J}$.

Conclusion. Dans $\widehat{\mathbf{C}}$, l'équation $X^2=-\mathrm{I}$ possède exactement deux solutions : $\pm\mathrm{J}$.

22) Dans $\widehat{\mathbf{C}}$: $X^4=\mathrm{I}\Longleftrightarrow X^4-\mathrm{I}=0\Longleftrightarrow\left(X^2-\mathrm{I}\right)\left(X^2+\mathrm{I}\right)=0$.

Puisque $\widehat{\mathbf{C}}$ est un ANNEAU INTEGRE, on peut alors affirmer que : $X^4=\mathrm{I}\Longleftrightarrow X^2=\pm\mathrm{I}$.

Conclusion. Dans $\widehat{\mathbf{C}}$, l'équation $X^4=\mathrm{I}$ possède exactement quatre solutions : $\pm\mathrm{I}$ et $\pm\mathrm{J}$.

23) Soit $Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}^*$. D'après la question 16, on peut écrire : $Z(a,b)=|Z(a,b)|\times\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}$ où $\theta=\mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)$.

Soit $X\in\widehat{\mathbf{C}}$ tel que $X^2=Z(a,b)$. Nécessairement $X\neq 0$, puisque $Z(a,b)$ est supposé non nul. On peut donc écrire : $X=|X|\times\mathrm{E}^{\varphi\mathrm{J}}$ où $\varphi=\mathrm{ARG}(X)$.

L'équation $X^2=Z(a,b)$ est alors équivalente à : $|X|^2\times\mathrm{E}^{2\varphi\mathrm{J}}=|Z(a,b)|\times\mathrm{E}^{\theta\mathrm{J}}$. D'après la méthode d'identification, on en déduit que :

$$\left[X^2=Z(a,b)\right]\Longleftrightarrow\begin{cases}|X|^2=|Z(a,b)|\\ 2\varphi=\theta\ [2\pi]\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}|X|=|Z(a,b)|^{1/2}\\ \varphi=\theta/2\ [\pi]\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\left[X=|Z(a,b)|^{1/2}\,\mathrm{E}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{J}}\vee X=|Z(a,b)|^{1/2}\,\mathrm{E}^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\mathrm{J}}\right]\Longleftrightarrow X=\pm|Z(a,b)|^{1/2}\,\mathrm{E}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{J}}$$

Conclusion. Pour tout $Z(a,b)\in\widehat{\mathbf{C}}^*$, l'équation $X^2=Z(a,b)$ possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$, qui sont : $\pm|Z(a,b)|^{1/2}\,\mathrm{E}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{J}}$ (avec $\theta=\mathrm{ARG}\left(Z(a,b)\right)$).

Il revient au même de dire que tout élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$ possède exactement deux racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

24) **Application**. D'après la question précédente, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, qui est un élément de $\widehat{\mathbf{C}}^*$, possède exactement deux racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$ qui sont $\pm |A|^{1/2}\,\mathrm{E}^{\frac{\mathrm{ARG}(A)}{2}\,\mathrm{J}}$.
Deux calculs directs permettent d'obtenir : $|A| = 2$ et $\mathrm{ARG}\,(A) = \dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. L'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ admet exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ qui sont $\pm\sqrt{2}\mathrm{E}^{\frac{\pi}{6}\,\mathrm{J}}$, c'est à dire explicitement : $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{6} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$

➤ Partie F - Equations du second degré dans $\widehat{\mathbf{C}}$

25) Puisque A est un élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$, et que $\widehat{\mathbf{C}}$ est un corps, A est inversible dans $\widehat{\mathbf{C}}$. On peut donc multiplier [‡] tous les termes de (E) par A^{-1} pour débuter la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
& AX^2 + BX + C = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & A^{-1}\left(AX^2 + BX + C\right) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & X^2 + BA^{-1}X + CA^{-1} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 - \frac{1}{4}B^2A^{-2} + CA^{-1} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 - \frac{1}{4}B^2A^{-2} + \frac{1}{4}\,4ACA^{-2} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(4AC - B^2\right)A^{-2} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\Delta A^{-2} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

➤ <u>Si $\Delta = 0$</u> : l'équation (E) équivaut alors à $\left(X + \dfrac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ d'où : $X = -\dfrac{1}{2}\,BA^{-1}$.

➤ <u>Si $\Delta \neq 0$</u> : d'après la question précédente, Δ possède alors deux racines carrées dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Notons δ l'une d'entre elles, de telle sorte que $\delta \in \widehat{\mathbf{C}}$ et $\delta^2 = \Delta$. L'équation (E) équivaut alors à :

$$\begin{aligned}
& \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\delta^2A^{-2} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right)^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\
\iff & \left(\left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right) - \left(\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right)\right) \times \left(\left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right) + \left(\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right)\right) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois le fait que $\widehat{\mathbf{C}}$ est intègre, on peut continuer notre raisonnement par équivalences :

$$\begin{aligned}
& \left[\left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right) - \left(\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right] \vee \left[\left(X + \frac{1}{2}\,BA^{-1}\right) + \left(\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right] \\
\iff & \left[X + \frac{1}{2}\,BA^{-1} = \frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right] \vee \left[X + \frac{1}{2}\,BA^{-1} = -\frac{1}{2}\,\delta A^{-1}\right] \\
\iff & \left[X = \frac{1}{2}\,(-B + \delta)\,A^{-1}\right] \vee \left[X = \frac{1}{2}\,(-B - \delta)\,A^{-1}\right]
\end{aligned}$$

‡. A gauche ou à droite, puisqu'en outre l'anneau $\widehat{\mathbf{C}}$ est commutatif.

Dans le cas où $\Delta \neq 0$, l'équation (E) possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ qui sont : $\dfrac{1}{2}\,(-B \pm \delta)\,A^{-1}$.

Conclusion. Soient A, B et C dans $\widehat{\mathbf{C}}$, avec $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. On note (E) l'équation

$$AX^2 + BX + C = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \qquad \text{d'inconnue } X \in \widehat{\mathbf{C}}$$

Enfin on note Δ (discriminant de l'équation (E)) l'élément de $\widehat{\mathbf{C}}$ défini par : $\Delta = B^2 - 4AC$.

Deux cas peuvent se présenter :

➤ Si $\Delta = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$: alors l'équation (E) possède une unique solution dans $\widehat{\mathbf{C}}$, qui est : $-\dfrac{1}{2}\,BA^{-1}$.

➤ Si $\Delta \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$: alors l'équation (E) possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ qui sont : $\dfrac{1}{2}\,(-B \pm \delta)\,A^{-1}$ (où δ est un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$ tel que $\delta^2 = \Delta$).

26) **Application**. On a : $X^2 - 2\mathrm{J}X - \mathrm{J} = \mathrm{I} \Longleftrightarrow X^2 - 2\mathrm{J}X - \mathrm{J} - \mathrm{I} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. Cette équation étant du second degré à coefficients dans $\widehat{\mathbf{C}}$, on peut lui appliquer le résultat de la question précédente pour la résoudre dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

Son discriminant est : $\Delta = (-2\mathrm{J})^2 - 4\,(-\mathrm{J} - \mathrm{I}) = 4\mathrm{J}^2 + 4\mathrm{J} + 4\mathrm{I}$ d'où $\Delta = 4\mathrm{J}$ (ainsi $\Delta \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$).

En outre : $4\mathrm{J} = 4\mathrm{E}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{J}}$, donc $\delta = 2\mathrm{E}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{J}}$ est une racine carrée de Δ dans $\widehat{\mathbf{C}}$.

D'après la question précédente, l'équation possède donc deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$ qui sont : $\mathrm{J} \pm \mathrm{E}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{J}}$.

Conclusion. L'équation $X^2 - 2\mathrm{J}X - \mathrm{J} = \mathrm{I}$ possède exactement deux solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$, qui sont $\mathrm{J} \pm \mathrm{E}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{J}}$; c'est à dire les matrices

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

➤ Partie G - Racines n-ièmes de l'unité dans $\widehat{\mathbf{C}}$

27) Soit $Z \in \widehat{\mathbf{U}}_n$. Alors $Z^n = \mathrm{I}$ donc $|Z^n| = |\mathrm{I}|$ donc $|Z|^n = 1$ d'où : $|Z| = 1$ et donc $Z \in \widehat{\mathbf{U}}$. En résumé : $\left[Z \in \widehat{\mathbf{U}}_n\right] \Longrightarrow \left[Z \in \widehat{\mathbf{U}}\right]$. **Conclusion**. $\widehat{\mathbf{U}}_n \subset \widehat{\mathbf{U}}$.

28) Comme d'habitude :

➤ **(SG1)** $\widehat{\mathbf{U}}_n \subset \widehat{\mathbf{U}}$, d'après la question précédente.

➤ **(SG2)** $\mathrm{I} \in \widehat{\mathbf{U}}_n$ puisque $\mathrm{I}^n = \mathrm{I}$.

➤ **(SG3)** $\forall\,(Z, Z') \in \widehat{\mathbf{U}}_n^2,\ Z \times Z' \in \widehat{\mathbf{U}}_n$ puisque $(Z \times Z')^n = Z^n \times Z'^n = \mathrm{I}$.

➤ **(SG4)** $\forall\,Z \in \widehat{\mathbf{U}}_n,\ Z^{-1} \in \widehat{\mathbf{U}}_n$ puisque $\left(Z^{-1}\right)^n = (Z^n)^{-1} = \mathrm{I}$.

Conclusion : $\left(\widehat{\mathbf{U}}_n, \times\right)$ est un sous-groupe de $\left(\widehat{\mathbf{U}}, \times\right)$.

29) Notons $E = \left\{\mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{J}} \,/\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]\right\}$, et prouvons que $E = \widehat{\mathbf{U}}_n$.

Soit $Z \in \widehat{\mathbf{U}}_n$. On a déjà montré que $\widehat{\mathbf{U}}_n \subset \widehat{\mathbf{U}}$, donc $|Z| = 1$. Il existe donc un réel θ tel que : $Z = \mathrm{E}^{\theta\,\mathrm{J}}$. Puique $Z \in \widehat{\mathbf{U}}_n$, il s'ensuit que $\mathrm{E}^{n\theta\,\mathrm{J}} = \mathrm{I}$, et donc : $n\theta = 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire : $\theta = 0\ [2\pi/n]$.

Par suite il existe un entier relatif k tel que : $\theta = 2k\pi/n$. Donc : $\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{\mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{J}} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il reste à établir que : $\widehat{\mathbf{U}}_n = E$.

Il est déjà immédiat que : $\boxed{E \subset \widehat{\mathbf{U}}_n\ \ (\spadesuit)}$.

Réciproquement, soit Z un élément de $\widehat{\mathbf{U}}_n$. Il existe un entier relatif k tel que $Z = \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}}$. En effectuant la division euclidienne de k par n, on a : $k = nq + r$, avec $r \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$. D'où :

$$Z = \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}} = \mathrm{E}^{\frac{2(nq+r)\pi}{n}\,\mathrm{J}} = \underbrace{\mathrm{E}^{\frac{2nq\pi}{n}\,\mathrm{J}}}_{=\mathrm{I}}\mathrm{E}^{\frac{2r\pi}{n}\,\mathrm{J}} = \mathrm{E}^{\frac{2r\pi}{n}\,\mathrm{J}}.$$

Par suite : $Z = \mathrm{E}^{\frac{2r\pi}{n}\,\mathrm{J}}$ avec $r \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$, ce qui prouve que $Z \in E$, et l'inclusion : $\boxed{\widehat{\mathbf{U}}_n \subset E \ \ (\clubsuit)}$.

Conclusion : d'après la règle de double inclusion on a $\widehat{\mathbf{U}}_n = \left\{ \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}} \ / \ k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!] \right\}$.

30) D'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{W \in \widehat{\mathbf{U}}_n} W = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{n}\,\mathrm{J}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{E}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{J}}\right)^k$.

D'après la question 9-f on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{E}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{J}}\right)^k = \underbrace{\left(\mathrm{I} - \left(\mathrm{E}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{J}}\right)^n\right)}_{=0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}} \left(\mathrm{I} - \mathrm{E}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{J}}\right)^{-1} = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{W \in \widehat{\mathbf{U}}_n} W = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

31) **Application**. Déterminons toutes les matrices $X \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que

$$X^4 = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Notons A la matrice de droite de cette égalité. On a : $X^4 = A \Longleftrightarrow \begin{cases} |X| = |A|^{1/4} \\ \mathrm{ARG}(X) = \dfrac{\mathrm{ARG}(A)}{4} \ [\pi/2] \end{cases}$.

Or : $|A| = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{256} = 16$. Il s'ensuit que : $|X| = 2$.

Par ailleurs : $\mathrm{ARG}(A) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'où : $\mathrm{ARG}(X) = \dfrac{\pi}{16}\ [\pi/2]$.

Conclusion : l'équation $X^4 = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$ possède exactement quatre solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$\pm 2\mathrm{E}^{\frac{\pi}{16}\,\mathrm{J}} \text{ et } \pm 2\mathrm{J}\mathrm{E}^{\frac{\pi}{16}\,\mathrm{J}}$$

Comme il est d'ailleurs bien connu que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, on peut également conclure explicitement :

Conclusion : l'équation $X^4 = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$ possède exactement quatre solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} & -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ -\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

32) Une similitude directe ayant un centre Ω d'affixe ω admet une écriture complexe de la forme : $z \longmapsto a(z-\omega)+\omega$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$). Lorsque ce centre est le point O, on a $\omega = 0$.

Il s'ensuit $\boxed{\text{qu'un élément de } \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}) \text{ est une transformation } f_a \text{ ayant pour écriture complexe : } z \longmapsto az}$ $(a \in \mathbb{C}^*)$.

En outre $\boxed{\left(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ\right) \text{ est un groupe abélien}}$ puisque c'est un sous-groupe du groupe des similitudes directes, et que deux similitudes de même centre commutent.

33) Il est immédiat que l'application $\rho : \widehat{\mathbf{C}}^* \longrightarrow \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})$ qui à tout $Z = |Z|\,\mathrm{E}^{\theta\,\mathrm{J}} \in \widehat{\mathbf{C}}^*$ associe la similitude d'écriture complexe $z \longmapsto |Z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ est telle que $\psi \circ \rho = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbf{C}}^*}$ et $\rho \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})}$.

Il s'ensuit que $\boxed{\psi \text{ est bijective (et } \psi^{-1} = \rho)}$.

34) Il suffit de voir que la composée des similitudes d'écritures complexes $z \longmapsto az$ et $z \longmapsto a'z$ est la similitude d'écriture complexe $z \longmapsto (aa')\,z$ pour conclure que : $\boxed{\forall\,(f,g) \in \mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C})^2,\ \psi(f \circ g) = \psi(f) \times \psi(g)}$.

35) **BONUS**. Déterminer toutes les matrices $M \in \widehat{\mathbf{C}}$ telles que $(M+\mathrm{I})^5 = (M-\mathrm{I})^5$.

Observons déjà que I n'est pas solution de l'équation. Ainsi $M \neq \mathrm{I}$, et $M - \mathrm{I}$ est donc inversible, en tant qu'élément non nul de $\widehat{\mathbf{C}}$. On a donc $M \neq \mathrm{I}$ et :

$$\left[(M+\mathrm{I})^5 = (M-\mathrm{I})^5\right] \Longleftrightarrow \left[\left((M+\mathrm{I})(M-\mathrm{I})^{-1}\right)^5 = \mathrm{I}\right] \Longleftrightarrow \left[(M+\mathrm{I})(M-\mathrm{I})^{-1} \in \widehat{\mathbf{U}}_5\right]$$

Or : $(M+\mathrm{I})(M-\mathrm{I})^{-1} \in \widehat{\mathbf{U}}_5 \quad \text{et} \quad M \neq \mathrm{I}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ (M+\mathrm{I})(M-\mathrm{I})^{-1} = \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ M+\mathrm{I} = \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}}(M-\mathrm{I})$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ \left(\mathrm{I} - \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}}\right) M = -\mathrm{I} - \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ \left(\mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}} - \mathrm{I}\right) M = \mathrm{E}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{J}} + \mathrm{I}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ \mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}\left(\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} - \mathrm{E}^{-\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}\right) M = \mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}\left(\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} + \mathrm{E}^{-\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}\right)$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ \left(\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} - \mathrm{E}^{-\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}\right) M = \mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} + \mathrm{E}^{-\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ \left(\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} - \overline{\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}}\right) M = \mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}} + \overline{\mathrm{E}^{\frac{k\pi}{5}\mathrm{J}}}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\mathrm{J}M = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![1,4]\!],\ M = -\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)\mathrm{J}$

Conclusion : l'équation $(M+\mathrm{I})^5 = (M-\mathrm{I})^5$ possède exactement quatre solutions dans $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$-\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{J};\ -\mathrm{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\mathrm{J};\ -\mathrm{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right)\mathrm{J} \quad \text{et} \quad -\mathrm{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\mathrm{J}$$