Devoir Maison N° 13

Espaces Vectoriels

Soit E un espace vectoriel réel. Si f et g sont deux endomorphismes de E, on note $\operatorname{Im} f$ l'espace image de f, $\operatorname{Ker} f$ le noyau de f, $fg = f \circ g$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, $0 = \Theta$ (application nulle) et $e = \mathrm{Id}_E$ (application identité).
Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

1. Soit $u \in A_k$.

- **a)** u peut-il être inversible ? Dans ce cas, préciser u.
- **b)** Déterminer $u(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} u$.
- **c)** Montrer que, si $k \neq 0$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces supplémentaires. Que dire de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ si $k = 0$?
- **d)** On suppose que E est de dimension finie. Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice de u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ? Si $k = 0$, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ?

2. Soient u et v deux endomorphismes de E appartenant à A_k. On suppose dans les questions a), b), c) de cette partie, que $k \neq 0$.

- **a)** Montrer que : $uv + vu = 0$ implique $uv = vu = 0$.
- **b)** A quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ appartient-il à A_k ? Montrer que, dans ce cas, $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et que $\operatorname{Ker}(u + v) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$.
- **c)** Montrer que, si $uv = vu$, uv appartient à un ensemble $A_{k'}$ et que, dans ce cas, $\operatorname{Im} uv = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} uv = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$.
- **d)** On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0 avec $u \neq 0$ et que $\dim(E) = 2$. Soit e_1 un vecteur de E tel que $u(e_1) = e_2 \neq 0_E$. Montrer que (e_1, e_2) forme une base de E. Déterminer la matrice associée à u dans cette base. En déduire que, dans ce cas, $uv + vu = 0$ implique encore $uv = vu = 0$.

3. Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation $f^2 - af + be = 0$ où a et b sont des réels donnés. On suppose que f et e sont linéairement indépendants.

- **a)** Quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2 telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1 e$ et $v = f - \lambda_2 e$ appartiennent respectivement à A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.
- **b)** Montrer que, dans ce cas, on a $uv = vu = 0$. Expliquer ce résultat en considérant l'endomorphisme $u - v$.
- **c)** Calculer, pour p entier positif, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.
- **d)** A quelle condition nécessaire et suffisante f est-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

4. Soit g un endomorphisme de E, g de rang 1.

- **a)** Montrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que, si $\operatorname{Im}(g)$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$ sont supplémentaires.
- **b)** On suppose que E est de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Montrer que : $k = \operatorname{Tr}(M)$ (où $\operatorname{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M).

5. On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Soit F une fonction donnée non nulle appartenant à E et u l'application qui, à toute fonction $G \in E$ fait correspondre l'application H définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$H(x) = \int_0^1 F(x)tG(t)\mathrm{d}t.$$

- **a)** Montrer que u est un endomorphisme de E.
- **b)** Montrer que u est de rang 1. Déterminer $\operatorname{Im} u$.
- **c)** Montrer qu'il existe un réel k tel que $u \in A_k$ et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.
- **d)** Calculer k lorsque $F(x) = \arcsin(x)$.
- **e)** Calculer k lorsque $F(x) = e^{\sqrt{x}}$.

6. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et u l'application qui, à toute fonction $f \in \mathcal{C}$, fait correspondre la fonction g définie par $g(x) = xf'(x)$.

- **a)** Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.
- **b)** On se donne le réel k. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}$ tel que la restriction de u à E, que l'on notera v, soit un endomorphisme de E et que $v \in A_k$. Donner la dimension et une base $\mathcal{B}$ de E en distinguant le cas $k = 0$ et le cas où $k \neq 0$.
- **c)** Déterminer, dans chacun des cas, la matrice associée à v dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de v ?

Fin

Corrigé :

1.a. Si u est inversible et si $u^2 = k.u$, alors, en composant par u^{-1}, on obtient : $u = k.e$.
Donc u est l'homothétie de rapport k. Réciproquement, il est clair que cette homothétie est dans A_k.
De plus, $k.e$ est inversible ssi $k \neq 0$.

Donc, si $k \neq 0$, A_k ne contient qu'un seul élément inversible : l'homothétie de rapport k.
A_0 ne contient aucun élément inversible.

1.b. Si $x \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x' \in E$ tel que $u(x') = x$; donc $u(x) = u^2(x') = k.u(x') = k.x$.
$\boxed{\text{Si } x \in \mathrm{Im}(u),\ u(x) = k.x}$.

1.c. Si $k \neq 0$, pour tout $x \in E$, $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et l'on a, d'après ce qui précède : $u(y) = k.y$.
On pose alors : $x = (x - \frac{1}{k}.y) + \frac{1}{k}.y$.
On a : $\frac{1}{k}.y \in \mathrm{Im}(u)$ et $u(x - \frac{1}{k}.y) = u(x) - \frac{1}{k}.u(y) = y - \frac{1}{k}.k.y = 0_E$, donc $(x - \frac{1}{k}.y) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u)$.
De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, alors $u(x) = 0_E$ et $u(x) = k.x$; donc $k.x = 0_E$, soit $x = 0_E$ car $k \neq 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$. Par définition, on a donc : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.
$\boxed{\text{Donc Ker}(u) \text{ et Im}(u) \text{ sont supplémentaires si } k \neq 0}$.

Si $k = 0$, on a : $u^2 = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)}$.

1.d. Si $k \neq 0$, d'après ce qui précède, Ker(u) et Im(u) sont supplémentaires dans E.
Donc on peut choisir une base B de E adaptée à cette décomposition.

Posons $B = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ avec $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de Ker(u) et $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de Im(u).
$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) = 0_E$ et $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $u(f_i) = k.f_i$.
Donc $M_B(u)$ est diagonale et, décomposée en blocs, on a : $M_B(u) = \begin{pmatrix} O_p & O_{pq} \\ O_{qp} & k.I_q \end{pmatrix}$.

Si $k = 0$, alors $u^2 = 0$. S'il existe une base B de E dans laquelle la matrice M de u est diagonale, alors $M^2 = O$ et donc tous les éléments diagonaux de M sont nuls. Donc M = O, soit u = 0.

Donc, si $k = 0$ et $u = 0$, la matrice associée à u dans n'importe quelle base est diagonale.
Si $k = 0$ et $u \neq 0$, il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de u soit diagonale.

2.a. On suppose que $uv + vu = 0$.
Alors, en composant par u à droite et à gauche, on obtient : $u^2v + uvu = 0$ et $uvu + vu^2 = 0$.
Par différence et comme $u^2 = k.u$, on a : $k.uv - k.vu = 0$, soit $uv - vu = 0$ car $k \neq 0$.
Donc $uv = -vu = vu$, soit $uv = vu = 0$. $\boxed{\text{Donc } uv + vu = 0 \text{ implique } uv = vu = 0}$.
La réciproque est évidente. Donc on a, en fait, l'équivalence : $\boxed{uv + vu = 0 \text{ ssi } uv = vu = 0}$.

2.b. On a : $(u + v) \in A_k$ ssi $(u + v)^2 = k.(u + v)$ ssi $u^2 + uv + vu + v^2 = k.u + k.v$.
Mais u et v sont dans A_k donc $u^2 = k.u$ et $v^2 = k.v$. D'où : $(u + v) \in A_k$ ssi $uv + vu = 0$.
D'après la question précédente, on en déduit que : $\boxed{(u + v) \in A_k \text{ ssi } uv = vu = 0}$.

Si $y \in \mathrm{Im}(u + v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
On a donc $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
Si $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, il existe $x \in E$ et $x' \in E$ tels que : $y = u(x) + v(x')$.

Mais alors : $u(y) = u^2(x)$ car $uv = 0$, donc $u(y) = k.u(x)$, soit $u(x) = u(\frac{1}{k}.y)$ car $k \neq 0$.

De même, $v(x') = v(\frac{1}{k}.y)$. Donc $y = (u + v)(\frac{1}{k}.y)$, donc $y \in \mathrm{Im}(u + v)$. D'où : $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u + v)$.

Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u + v)}$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$, alors $u(x) = 0_E$ et $v(x) = 0_E$; donc $(u + v)(x) = 0_E$, soit $x \in \mathrm{Ker}(u + v)$.
Donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u + v)$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u + v)$, alors $u(x) + v(x) = 0_E$; en composant par u, on obtient : $u^2(x) = 0_E$ car $uv = 0$.
Donc $k.u(x) = 0_E$, soit $u(x) = 0_E$ car $k \neq 0$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
Par symétrie des rôles joués par u et v, on a de même : $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
D'où : $\mathrm{Ker}(u + v) \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.
Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u + v)}$.

2.c. On a : $(uv)^2 = uvuv = u(vu)v = u(uv)v$ car $uv = vu$. Donc $(uv)^2 = u^2v^2 = k.u.k.v = k^2.uv$.
$\boxed{\text{Donc si } uv = vu, \text{ alors } uv \in A_{k'} \text{ où } k' = k^2}$.

On a, de façon évidente : $\mathrm{Im}(uv) \subset \mathrm{Im}(u)$. Puis, comme $uv = vu$, $\mathrm{Im}(uv) = \mathrm{Im}(vu) \subset \mathrm{Im}(v)$.
D'où $\mathrm{Im}(uv) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$; alors $u(y) = k.y$ et $v(y) = k.y$ d'après la question **1.b**.
Donc $(uv)(y) = u(v(y)) = u(k.y) = k^2.y$. Comme $k \neq 0$, $y = (uv)(\frac{1}{k^2}.y)$, donc $y \in \mathrm{Im}(uv)$.
D'où $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(uv)$. Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\mathrm{Im}(uv) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$; alors $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(u)$ et $b \in \mathrm{Ker}(v)$.
Donc $v(x) = v(a)$ car $b \in \mathrm{Ker}(v)$; puis $(uv)(x) = (uv)(a) = (v)(a) = v(u(a)) = 0_E$ car $a \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $x \in \mathrm{Ker}(uv)$. D'où $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(uv)$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(uv)$, alors $u(v(x)) = 0_E$ donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.
Or, $v^2(x) = k.v(x)$, donc $v(v(x) - k.x) = 0_E$, soit $(v(x) - k.x) \in \mathrm{Ker}(v)$.
Or : $k.x = k.x - v(x) + v(x)$ avec $k.x - v(x) \in \mathrm{Ker}(v)$ et $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. D'où $k.x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.
Comme $k \neq 0$, $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. D'où : $\mathrm{Ker}(uv) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.
Finalement, on a bien l'égalité : $\boxed{\mathrm{Ker}(uv) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)}$.

2.d. $e_1 \neq 0_E$ et $e_2 \neq 0_E$. S'il existe un réel λ tel que $e_2 = \lambda.e_1$, alors $\lambda \neq 0$ et $u(e_2) = \lambda.u(e_1)$,
soit $u^2(e_1) = \lambda.u(e_1)$, soit $\lambda.u(e_1) = 0_E$ car $u^2 = 0$; donc $\lambda = 0$ ou $u(e_1) = 0_E$: impossible.
Donc (e_1, e_2) est libre. Comme on travaille dans un espace de dimension 2, $\boxed{B = (e_1, e_2) \text{ est une base de } E}$.

On a : $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = u^2(e_1) = 0_E$. Donc $\boxed{M = M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Notons $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de v dans la base B. $uv + vu$ a pour matrice MN + NM.

Or : $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, donc $MN + NM = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+d & b \end{pmatrix}$.

Donc $uv + vu = 0$ équivaut à MN + NM = O soit $b = 0$ et $d = -a$. Donc $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix}$. Comme $v^2 = 0$, $N^2 = O$.

Or, $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Donc $N^2 = O$ équivaut à $a = 0$. Donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. D'où MN = NM = O.

$\boxed{\text{On a bien : } uv + vu = 0 \text{ implique } uv = vu = 0.}$ (et même l'équivalence)

3.a. On a : $u \in A_k \Leftrightarrow u^2 = k.u \Leftrightarrow (f - \lambda_1.e)^2 = k.(f - \lambda_1.e) \Leftrightarrow f^2 - 2\lambda_1.f + (\lambda_1)^2.e = k.f - k\lambda_1.e$.
Or $f^2 = a.f - b.e$; donc $u \in A_k \Leftrightarrow (a - 2\lambda_1 - k).f + ((\lambda_1)^2 + k\lambda_1 - b).e = 0$.
De même : $v \in A_{k'} \Leftrightarrow (a - 2\lambda_2 - k').f + ((\lambda_2)^2 + k'\lambda_2 - b).e = 0$.
Mais f et e sont linéairement indépendants.
Donc $(a - 2\lambda_1 - k).f + ((\lambda_1)^2 + k\lambda_1 - b).e = 0 \Leftrightarrow k = a - 2\lambda_1$ et $(\lambda_1)^2 + k\lambda_1 - b = 0$;
par substitution : $(a - 2\lambda_1 - k).f + ((\lambda_1)^2 + k\lambda_1 - b).e = 0 \Leftrightarrow k = a - 2\lambda_1$ et $(\lambda_1)^2 - a\lambda_1 + b = 0$.
De même : $(a - 2\lambda_2 + k').f + ((\lambda_2)^2 + k'\lambda_2 - b).e = 0 \Leftrightarrow k' = a - 2\lambda_2$ et $(\lambda_2)^2 - a\lambda_2 + b = 0$.
Donc λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation : $x^2 - ax + b = 0$ (e).
Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = a^2 - 4b$. Donc (e) admet deux racines réelles ssi $a^2 > 4b$.

$\boxed{\text{Donc il existe deux constantes réelles distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ telles que } (u \in A_k \text{ et } v \in A_{k'}) \text{ ssi } a^2 > 4b}$.

Dans ce cas, d'après les relations entre coefficients et racines de (e), on a : $a = \lambda_1 + \lambda_2$ et $b = \lambda_1\lambda_2$.
$\boxed{\text{Donc } k = \lambda_2 - \lambda_1 \text{ et } k' = \lambda_1 - \lambda_2}$.

3.b. On a : $uv = (f - \lambda_1.e)(f - \lambda_2.e)$ avec λ_1 et λ_2 racines de (e).
Donc $uv = f^2 - (\lambda_1 + \lambda_2).f + \lambda_1\lambda_2.e = a.f - b.e - (\lambda_1 + \lambda_2).f + \lambda_1\lambda_2.e = (a - (\lambda_1 + \lambda_2)).f - (b - \lambda_1\lambda_2).e = 0$
d'après plus haut. Donc $\boxed{uv = 0 \text{ et } vu = 0}$ car f et e commutent, donc u et v aussi.

On a : $u - v = (\lambda_2 - \lambda_1).e = k'.e \in A_{k'}$ d'après la question **1.a**.
D'après la question **2.b**, $(u - v) \in A_k'$ équivaut à $u(-v) = (-v)u = 0$, soit $\boxed{uv = vu = 0}$.
$\boxed{\text{Donc le résultat était prévisible}}$.

3.c. Après quelques calculs au brouillon, on conjecture que : $\forall p \in \mathbb{N}, f^p = \dfrac{\lambda_2^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.u - \dfrac{\lambda_1^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.v$: (Q_p).

(Q_0) est vraie car : $f^0 = e = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(u - v) = \dfrac{\lambda_2^0}{\lambda_2 - \lambda_1}.u - \dfrac{\lambda_1^0}{\lambda_2 - \lambda_1}.v$.

Supposons (Q_p) vraie pour un $p \in \mathbb{N}$, alors $f^{p+1} = \dfrac{\lambda_2^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.f\,u - \dfrac{\lambda_1^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.f\,v$.

Or, $u = f - \lambda_1.e$, donc $f\,u = f^2 - \lambda_1.f = (a - \lambda_1).f - b.e = \lambda_2.f - \lambda_1\lambda_2.e = \lambda_2.(f - \lambda_1.e) = \lambda_2.u$.

De même : $f\,v = \lambda_1.v$. Donc $f^{p+1} = \dfrac{\lambda_2^{p+1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.u - \dfrac{\lambda_1^{p+1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.v$; (Q_{p+1}) est vérifiée.

Par récurrence : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, f^p = \dfrac{\lambda_2^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.u - \dfrac{\lambda_1^p}{\lambda_2 - \lambda_1}.v}$.

3.d. On a : $f^2 - a.f + b.e = 0$. Si f est inversible, en composant la relation précédente par f^{-1}, on obtient :
$f - a.e + b.f^{-1} = 0$, soit $b.f^{-1} = a.e - f$.

Si $b = 0$, on obtient f et e linéairement dépendants : impossible. Il faut donc $b \neq 0$ et alors $f^{-1} = \dfrac{a}{b}.e - \dfrac{1}{b}.f$.

Réciproquement, si $b \neq 0$ et $f^{-1} = \dfrac{a}{b}.e - \dfrac{1}{b}.f$, alors $ff^{-1} = \dfrac{1}{b}(a.f - f^2) = e = f^{-1}f$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est inversible ssi } b \neq 0 \text{ et, dans ce cas, } f^{-1} = \dfrac{a}{b}.e - \dfrac{1}{b}.f}$

4.a. Si Im(g) $\subset$ Ker(g), alors $g^2 = 0$, donc $\boxed{g \in A_0}$.

Supposons Im(g) $\not\subset$ Ker(g) ; Im(g) $\cap$ Ker(g) est un sous-espace vectoriel de Im(g).
Or dim(Im(g)) = 1. Donc dim(Im(g) $\cap$ Ker(g))$\in \{0, 1\}$.
Si dim(Im(g) $\cap$ Ker(g)) = 1, alors Im(g) $\cap$ Ker(g) = Im(g), donc Im(g) $\subset$ Ker(g) : impossible.
Donc dim(Im(g) $\cap$ Ker(g)) = 0 et Im(g) $\cap$ Ker(g) = $\{0_E\}$.
De plus, dim(Im(g)) = 1, donc il existe $a \in E \backslash \{0_E\}$ tel que Im(g) = Vect(a).
$a \neq 0_E$, donc $a \notin$ Ker(g). Donc $g(a) \neq 0_E$ et $g(a) \in$ Vect(a). Donc il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(a) = k.a$.
Or : $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda.a$ car $g(x) \in$ Im(g).
D'où : $\forall x \in E$, $g^2(x) = \lambda.g(a) = \lambda k.a = k.(\lambda.a) = k.g(x)$. Donc $\boxed{g \in A_k}$.
Comme $k \neq 0$, d'après la question **1.c.**, $\boxed{\text{Ker}(g) \text{ et Im}(g) \text{ sont supplémentaires}}$.

4.b. Soit n = dim(E). D'après le théorème du rang, dim(Ker(g)) = $n - 1$.
Si Im(g) $\subset$ Ker(g), $k = 0$ et l'on considère une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de Ker(g) que l'on complète par un vecteur e_n pour avoir une base de E. on a : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $g(e_i) = 0_E$. De plus, $g(e_n) \in$ Im(g) donc $g(e_n) \in$ Ker(g).

Donc : $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $g(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i.g(e_i)$.

La matrice de g dans cette base est donc : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et Tr(M) = 0 = k.

Si Im(g) $\not\subset$ Ker(g), $k \neq 0$ et Ker(g) et Im(g) sont supplémentaires. On reprend les notations de la question **4.a.**
D'après la question **1.d.**, si on considère une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de Ker(g), $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est alors une base de E et la matrice de g dans cette base est : $M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$; donc Tr(M) = k.

Or la trace est invariante par changement de bases.
$\boxed{\text{Donc, que } k \text{ soit nul ou pas, pour toute matrice M représentative de } g \text{ dans une base donnée, Tr(M)} = k}$.

5.a. Soient G_1 et G_2 deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale, on a :
$\forall x \in [0, 1]$, $u(G_1 + \lambda.G_2)(x) = F(x)\int_0^1 t\,(G_1(t) + \lambda G_2(t))\,dt = F(x)\int_0^1 t\,G_1(t)\,dt + \lambda F(x)\int_0^1 tG_2(t)\,dt$;

donc $\forall x \in [0, 1]$, $u(G_1 + \lambda.G_2)(x) = u(G_1)(x) + \lambda u(G_2)(x)$, soit $u(G_1 + \lambda G_2) = u(G_1) + \lambda u(G_2)$. u est linéaire.
De plus, comme $F \in E$ et que $\int_0^1 t\,G(t)\,dt \in \mathbb{R}$, $H = u(G) \in E$. Donc $\boxed{u \text{ est bien un endomorphisme de E}}$.

5.b. $\forall G \in E$, $u(G) = \lambda.F$ où $\lambda = \int_0^1 t\,G(t)\,dt$. Donc Im($u$)$\subset$Vect(F).

De plus, si $G(t) = 1$, $u(G) = \frac{1}{2}F \neq 0$. Donc $\mathrm{Im}(u) \neq \{0_E\}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(F)}$. Donc $\boxed{u \text{ est de rang } 1}$.

5.c. D'après la question **4.**, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $u^2 = k.u$ et k vérifie : $u(F) = k.F$ ($k = 0$ si $F\in \mathrm{Ker}(u)$, soit si $\mathrm{Im}(u)\subset \mathrm{Ker}(u)$). D'après la question **5.b.**, $u(F) = k.F$ avec $\boxed{k = \int_0^1 t\,F(t)\,dt}$.

5.d. Si $F(x) = \arcsin(x)$, pour calculer k, on effectue un changement de variable en posant : $t = \sin(v) = \varphi(v)$ où $v\in [0, \frac{\pi}{2}]$; φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\varphi'(v) = \cos(v)$.

D'où : $k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v\sin(v)\cos(v)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\sin(2v)dv$.

Puis on effectue une intégration par parties en posant : $f(v) = v$, $f'(v) = 1$, $g'(v) = \sin(2v)$ et $g(v) = -\frac{1}{2}\cos(2v)$.

f et g sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'où : $k = -\frac{1}{4}\left[v\cos(2v)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2v)dv = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[\sin(2v)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$.

$\boxed{\text{Donc, pour } F = \arcsin,\ k = \frac{\pi}{8}}$.

5.e. Si $F(x) = e^{\sqrt{x}}$, on a : $k = \int_0^1 te^{\sqrt{t}}\ dt$; on effectue le changement de variable : $t = v^2 = \varphi(v)$, où $v\in [0, 1]$; φ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(v) = 2v$.

D'où : $k = \int_0^1 2v^3e^v\ dv$. On cherche une primitive de $h : v \longrightarrow 2v^3e^v$ sous la forme

$H : v \longrightarrow (a\,v^3 + b\,v^2 + c\,v + d)\,e^v$ avec $(a, b, c, d)\in \mathbb{R}^4$.

On a : $\forall t\in \mathbb{R}$, $H'(v) = h(v) \Leftrightarrow \forall t\in \mathbb{R}$, $(a\,v^3 + (3a + b)\,v^2 + (2b + c)\,v + c + d)\,e^v = 2v^3e^v$, soit

$\begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -12 \\ d = 12 \end{cases}$. Donc $k = \left[(2v^3 - 6v^2 - 12v + 12)e^v\right]_0^1$, soit $\boxed{k = 12 - 4e}$.

6.a. Si f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, il en est de même pour f', puis, par produit, il en est de même pour g. Donc $u(g)\in C$. Soient f_1 et f_2 dans C et $\lambda\in \mathbb{R}$.
On a : $\forall x\in]0, +\infty[$, $u(f_1 + \lambda.f_2)(x) = x\,(f_1 + \lambda.f_2)'(x) = x\,f_1'(x) + \lambda\,x\,f_2'(x) = u(f_1)(x) + \lambda.u(f_2)(x)$.
Donc $u(f_1 + \lambda.f_2) = u(f_1) + \lambda.u(f_2)$. u est linéaire. Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } C}$.

6.b. Soit $f\in C$; $\forall x\in]0, +\infty[$, $u^2(f)(x) = x\,(x\,f'(x))' = x\,f'(x) + x^2 f''(x)$.
On veut : $\forall x\in]0, +\infty[$, $u^2(f)(x) = k.u(f)(x)$, soit $\forall x\in]0, +\infty[$, $x\,f'(x) + x^2 f''(x) = k\,x\,f'(x)$.
Donc chercher E revient à chercher l'ensemble des solutions, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 2 : $x\,f''(x) + (1 - k)\,f'(x) = 0$ (E).
On pose $y = f'$ et on résout l'équation $x\,y' + (1 - k)\,y = 0$ (E').
Les solutions de (E') sur $]0, +\infty[$ sont les applications : $y(x) = \mu\,x^{(k-1)}$, où $\mu\in \mathbb{R}$.
Donc les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les applications f vérifiant : $\forall x\in]0, +\infty[$, $f'(x) = \mu\,x^{(k-1)}$, où $\mu\in \mathbb{R}$.

Si k = 0, on obtient les applications : $f(x) = \mu\ln(x) + \nu$ avec $(\mu, \nu)\in \mathbb{R}^2$.

Si $k \neq 0$, on obtient les fonctions : $f(x) = \mu \dfrac{x^k}{k} + \nu$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $v^2 = 0$ sur $E = \{x \longrightarrow \mu \ln(x) + \nu \ / \ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(1, \ln)$.
Donc, si $k = 0$, $\dim(E) = 2$ et $\mathcal{B} = (1, \ln)$ est une base de E.
On a aussi : $v^2 = k.v$ avec $k \neq 0$ sur $E = \{\mu\, x^k + \nu \ / \ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(x^k, 1)$.
Donc, si $k \neq 0$, $\dim(E) = 2$ et $\mathcal{B} = (1, x^k)$ est une base de E.

6.c. Pour $k = 0$, on a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $v(1)(x) = 0$ et $v(\ln)(x) = 1$. D'où $\boxed{M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Pour $k \neq 0$, on a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $v(1)(x) = 0$ et $v(x^k)(x) = k\, x^k$. D'où $\boxed{M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}$.

Dans les deux cas, $\boxed{\mathrm{rg}(v) = 1}$.