Devoir Maison N° 4

Nombres Réels

Exercice 1

Soit A un ensembe tel que $A = \left\{ \dfrac{2+(-1)^n}{n+1} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

1.) Montrer que A est bornée .

2.) Déterminer $\sup(A)$

3.) Montrer que $\inf(A) = 0$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. On considère l'équation (E_n) : $x^n - x - 1 = 0$.

1.) Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

2.) Montrer que la suite (x_n) est convergente et trouver sa limite.

3.) Montrer que $(x_n - 1) \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$.

Problème

1.) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists! q_n \in \mathbb{Z},\ \dfrac{q_n}{10^n} \leq x < \dfrac{1+q_n}{10^n}$.

On note $d_n = \dfrac{q_n}{10^n}$, d_n est appelé la valeur décimale approchée par défaut à la précision 10^{-n} de x. On pose $e_n = d_n + \dfrac{1}{10^n}$.

2.a)Montrer que : $d_n < e_{n+1}$ et $d_{n+1} < e_n$.

2.b)En déduire que : $10q_n \leq q_{n+1}$ et $1 + q_{n+1} \leq 10(1+q_n)$.

2.c)Montrer que les suites (d_n) et (e_n) sont adjacentes et convergent vers x.

On pose $c_{n+1} = q_{n+1} - 10q_n$.

3.) Montrer que : $c_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (c_{n+1} est appelé un chiffre).

On pose $c_0 = E(x)$ (Partie entière de x).

4.) Montrer que : $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}$.

On convient d'écrire : $d_n = c_0, c_1c_2\ldots c_n$ et $x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n = c_0, c_1c_2\ldots c_n\ldots$ appelé le développement décimal illimité du nombre réel x. Chaque chiffre aprés la virgule s'appelle une décimale, ainsi on passe de d_n à d_{n+1} par adjonction d'une nouvelle décimale au rang $n+1$ qui est c_{n+1}.

5.a) On suppose $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

5.b) On suppose $c_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 9$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 1$.

6.) Un développement décimal illimité du nombre réel x est dit propre s'il contient une infinité de décimales différentes de 9. Dans cette question , on se propose de montrer que le développement décimal obtenu dans la question **4.)** est propre. On raisonne par l'absurde et suppose donc le contraire.

6.a) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > p,\ c_n = 9$.

6.b) Montrer que pour tout $n > p,\ d_n + \dfrac{1}{10^n} = d_p + \dfrac{1}{10^p}$. On pose $\alpha = d_n + \dfrac{1}{10^n}$.

6.c) Montrer que pour tout $n > p,\ \ 0 < 10^n(\alpha - x) \leq 1$. Conclure.

7.) Soit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'entiers naturels vérifiants pour tout $n \geq 1,\ \ 0 \leq x_n \leq 9$. Cherchons s'il existe un nombre réel dont le développement décimal illimité de x est : $x_0, x_1x_2\dots x_n\dots$ avec $x_0 = E(x)$. On note $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}$.

7.a) Montrer que la suite (d_n) est convergente.

7.b) On pose $x = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n$ et on suppose que la suite (x_n) contient une infinité de termes distincts de 9. Montrer que le développement décimal de x est $x_0, x_1x_2\dots x_n\dots$.

8.) Application : Montrer qu'il n'existe aucune bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable c-à-d qu'il n'existe aucune bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. pour cela on va supposer par l'absurde qu'il existe une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On pose $\widetilde{S} = \left\{ \displaystyle\sum_{x\in A} \frac{1}{2^{f(x)}}\ /\ A \text{ une partie finie non vide de } S \right\}$.

1.) Montrer que $\widetilde{S}$ admet une borne supèrieure et que $0 < \sup(\widetilde{S}) \leq 2$.

(On admet que si A est finie non vide, alors $f(A)$ est majorée).

On pose $m(S) = \sup(\widetilde{S})$ et $E = \{x \in \mathbb{R}\ /\ m(]-\infty, x[) > x\}$.

2.) Montrer que E admet une borne supèrieure.

On pose $c = \sup(E)$.

3.a) Montrer que : $0 < c$.

3.b) Montrer que : $\exists y \in E,\ \ y > c - \dfrac{1}{2^{f(c)}}$ et $y > 0$.

3.c) Montrer que : $y + \dfrac{1}{2^{f(c)}} \in E$, Conclure.

FIN
FIN

Corrigé

1°) Montrons que A est bornée :

Soit $n \in \mathbb{N}$: on a : $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$

donc $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{2+(-1)^n}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \leq 3$.

donc A est minorée et majorée par 0 et 3 resp^t.

d'où $\boxed{\text{A est bornée}}$

2°) Déterminons sup(A).

on a 3 est un majorant de A et $3 \in A$ (prendre $n=0$)

donc $3 = \mathrm{Max}(A)$ d'où $\boxed{\sup(A) = 3}$

3°) Montrons que $\mathrm{Inf}(A) = 0$

On a 0 est un minorant de A.

Montrons par la caractérisation de la borne inférieure que $0 = \mathrm{Inf}(A)$

Soit $\varepsilon > 0$ d'après la propriété d'archimède

$\exists n \in \mathbb{N}^*$: $n > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\frac{1}{n} < \varepsilon$

d'où $0 < \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

or $\frac{1}{2(n+1)} = \frac{2+(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} \in A$

d'où $\exists x_0 \in A$: $0 < x_0 < \varepsilon$ avec $x_0 = \frac{1}{2(n+1)}$

d'où $\boxed{\mathrm{Inf}(A) = 0}$

PROBLÈME:

1°) Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists! q_n \in \mathbb{Z}, \frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{1+q_n}{10^n}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique entier q_n vérifiant : $q_n \leq x 10^n < 1+q_n$ c'est $E(10^n q_n)$.

donc : $\exists! q_n \in \mathbb{Z} (q_n = E(x \cdot 10^n) : \boxed{\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n+1}{10^n}}$

2°a) Montrons que : $d_n < e_{n+1}$ et $d_{n+1} < e_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ d'aprés : $d_n \leq x < e_n$ et $d_{n+1} \leq x < e_{n+1}$

d'où $\boxed{d_{n+1} < e_n}$ et $\boxed{d_n < e_{n+1}}$

2.b) Déduction: $10 q_n \leq q_{n+1}$ et $1+q_{n+1} \leq 10(1+q_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} < e_n \iff \frac{q_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{(q_n+1)}{10^n}$

$\iff q_{n+1} < 10(q_n+1)$

$\iff \boxed{q_{n+1}+1 \leq 10(q_n+1)}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $d_n < e_{n+1} \iff \frac{q_n}{10^n} < \frac{q_{n+1}+1}{10^{n+1}} \iff 10 q_n < q_{n+1}+1$

d'où $\boxed{10 q_n \leq q_{n+1}}$

2.c) Montrons que les suites (d_n) et (e_n) sont adjacentes.

soit $n \in \mathbb{N}$: $10 q_n \leq q_{n+1}$ donc $\frac{q_n}{10^n} \leq \frac{q_{n+1}}{10^{n+1}}$

d'où $d_n \leq d_{n+1}$ d'où : $\boxed{(d_n) \text{ est croissante}}$

et $1+q_{n+1} \leq 10(1+q_n)$

d'où $\frac{1+q_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \frac{1+q_n}{10^n}$ d'où $e_{n+1} \leq e_n$

donc $\boxed{(e_n) \text{ est décroissante}}$

et on a $\lim_{n\to+\infty} e_n - d_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ $\quad -1 < \frac{1}{10} < 1$

d'où $\boxed{(e_n) \text{ et } (d_n) \text{ sont adjacentes}}$. et puisque

$\forall n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq x < e_n$ donc $\boxed{x = \lim(d_n) = \lim(e_n)}$

3°) Montrons que $c_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

soit $n \in \mathbb{N}$: $10 q_n \leq q_{n+1} \Rightarrow c_{n+1} = q_{n+1} - 10 q_n \geq 0$

et $1+q_{n+1} \leq 10(1+q_n) \Rightarrow c_{n+1} = q_{n+1} - 10 q_n \leq 9$.

donc $\boxed{c_n \in \{0, 1, \dots, 9\}}$ $(c_{n+1} \in \mathbb{Z})$.

4°) Montrons que : $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}$.

on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_0}{10^0}$

$$= c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}}$$

$$= c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q_{k+1}}{10^{k+1}} - \frac{q_k}{10^k} \right)$$

$$= c_0 + \frac{q_n}{10^n} - \frac{q_0}{10^0} = \frac{q_n}{10^n} = d_n$$

donc $\boxed{d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}}$

5.a) Calculons : $\lim_{n\to+\infty} d_n$.

soit $n\in\mathbb{N}$: $d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{10^k}=c_0=1$ d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n=1}$

5.b) Montrons que $\lim_{n\to+\infty} d_n=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{10^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{10^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}$

$$=\frac{9}{10}\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\longrightarrow 1$$

d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n=1}$

6.a) Justifions : $\exists p\in\mathbb{N} : \forall n>p : c_n=9$.

on a supposer que le développement décimal n'est pas propre donc on a un nombre fini de décimal $\neq 9$. donc $\{n\in\mathbb{N} / c_n\neq 9\}$ est majorée soit $p=\max\{n\in\mathbb{N} \mid c_n\neq 9\}$ donc $\boxed{\forall n>p : \ c_n=9}$.

6.b) Montrons que pour tout $n>p$, $d_n+\frac{1}{10^n}=d_p+\frac{1}{10^p}$.

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{10^k}=\sum_{k=0}^{p}\frac{c_k}{10^k}+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{c_k}{10^k}$$ avec $p,n\in\mathbb{N}$ et $n>p$.

$$=d_p+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{9}{10^k}=d_p+\frac{9}{10^{p+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-p}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=d_p+\frac{1}{10^p}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-p}\right)$$

$$=d_p+\frac{1}{10^p}-\frac{1}{10^n}$$

d'où $\boxed{d_n+\frac{1}{10^n}=d_p+\frac{1}{10^p}}$

6.c) Montrons que pour tout $n>p$: $0<10^n(\alpha-x)\leq 1$.

Soient $n,p\in\mathbb{N}$ tq $n>p$ on a $\alpha=d_n+\frac{1}{10^n}=e_n$

on sait que $x<e_n$ donc $10^n(\alpha-x)=10^n(e_n-x)>0$.

et $10^n(\alpha-x)=10^n\left(d_n+\frac{1}{10^n}-x\right)=1+10^n\underbrace{(d_n-x)}_{\leq 0}\leq 1$.

d'où $n>p \Rightarrow 0<10^n(\alpha-x)\leq 1$

* Conclusion : on a $\forall n > p$: $0 < \alpha - x \leq \frac{1}{10^n}$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ donc $0 < \alpha - x \leq 0$ absurde.

d'où le développement décimal illimité $\boxed{\text{est propre}}$.

7.a) Montrons que la suite (d_n) est convergente

soit $n \in \mathbb{N}$: $d_{n+1} - d_n = \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$

donc (d_n) est croissante.

$$d_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{10^k} \leq x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$$

$$\leq x_0 + \frac{9}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\leq x_0 + 1 - \frac{1}{10^n} \leq x_0 + 1$$

donc (d_n) est majorée d'où (d_n) est convergente puisque (d_n) est croissante.

7.b) Montrons que le dev décimal de x est $x_0, x_1 \dots x_n \dots$

on a (d_n) est croiss et conv vers x donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq x$

Posons $e_n = d_n + \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$: $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} + d_{n+1} - d_n$.

$$= \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$$

$$= \frac{x_{n+1} - 9}{10^{n+1}} \leq 0. \quad (x_{n+1} \in [\![0, 9]\!]).$$

donc (e_n) est décroissante et $e_n = d_n + \frac{1}{10^n} \longrightarrow x$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$: $x \leq e_n$. on a (x_n) admet une infinité de termes $\neq 9$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \geq N \Rightarrow x_n \neq 9$

d'où $e_{n+1} - e_n = \frac{x_{n+1} - 9}{10^{n+1}} < 0$ pour tout $n \geq N$.

d'où $(e_n)_{n \geq N}$ est st décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $x < e_n$.

car sinon : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $e_{n_0} \leq x$

d'où $\forall n \geq n_1 = \mathrm{Max}(N+1, n_0)$: $e_n < e_{n_1} \leq e_{n_0} \leq x$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n < e_{n_1} < x$

d'où $x < e_{n_1} < x$ absurde.

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq x < e_n$.

or $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}$ d'où $10^n \sum\limits_{k=0}^{n} 10^{n-k} x_k \in \mathbb{Z}$.

d'où $10^n d_n \leq 10^n x < 10^n d_n + 1$

d'où $E(10^n x) = 10^n d_n$

d'où $q_n = 10^n d_n$ d'où $d_n = \frac{q_n}{10^n}$.

or $c_{n+1} = q_{n+1} - 10 q_n = 10^{n+1} d_{n+1} - 10^{n+1} d_n$

$= 10^{n+1}(d_{n+1} - d_n) = 10^{n+1} \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \quad c_{n+1} = x_{n+1}}$

d'où $\boxed{\text{le Dev décimal propre de } x \text{ est } x_0, x_1 \ldots x_n \ldots}$

8°) Montrons qu'il existe aucune bijection de $\mathbb{N}$ ds $\mathbb{R}$.

Supp par l'absurde qu'il existe une bij $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Posons $U_n = \varphi(n)$ et on pose le dev décimal de U_n comme suit $U_n = x_{n,0}, x_{n,1} x_{n,2} \ldots\ldots x_{n,p} \ldots\ldots$

Soit $y = y_0, y_1 \ldots\ldots y_n \ldots\ldots$ avec $y_n = 0$ si $x_{n,n} \neq 0$ et $y_n = 1$ si $x_{n,n} = 0$.

on a : y est un nombre réel donc $\exists m \in \mathbb{N}$:

$y = \varphi(m) = U_m = x_{m,0}, x_{m,1} \ldots x_{m,2} \ldots\ldots x_{m,m} \ldots\ldots x_{m,p} \ldots\ldots$

d'où $y_m = x_{m,m}$ d'où si $x_{m,m} = 0$ alors $y_m \neq 0$ absurde

et si $x_{m,m} \neq 0$ alors $y_m = 1 \neq 0$ absurde d'où, il n'y a pas de bij de $\mathbb{N}$ ds $\mathbb{R}$

Ex3 :

1°) * Montrons que $\tilde{S}$ admet une borne supérieure.

Soit $y \in \tilde{S}$ donc $\exists$ A une partie non vide de $\mathbb{R}$

tq $y = \sum_{x \in A} \frac{1}{2^{f(x)}}$.

et comme A est non vide et finie donc $f(A)$ est majorée

donc $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$: $f(x) \leq M$

et comme $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$: $M \leq N$

d'où $f(A) \subset \{0, 1, \dots, N\}$

donc $$y \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - (\tfrac{1}{2})^{N+1})$$

d'où $y \leq 2$

d'où 2 est majorant de $\tilde{S}$

d'où $\tilde{S}$ est non vide (puisque $S \neq \phi$) et majorée par 2

d'où $\boxed{\tilde{S} \text{ admet une borne sup}}$

* Montrons que $0 < \sup(\tilde{S}) \leq 2$.

on a 2 est un majorant de $\tilde{S}$ d'où $\sup(\tilde{S}) \leq 2$.

ona $S \neq \phi$ donc $\exists a \in \mathbb{R}$: $a \in S$ d'où

$$\sum_{x \in \{a\}} \frac{1}{2^{f(x)}} = \frac{1}{2^a} > 0 \text{ . et } \frac{1}{2^a} \in \tilde{S}$$

d'où $$0 < \frac{1}{2^a} \leq \sup(\tilde{S})$$

Cl : $\boxed{0 < \sup(\tilde{S}) \leq 2}$

2°) Montrons que E admet une borne supérieure.

$\forall x \in E$: $x < m(]-\infty, x[) \leq 2$ donc E est majorée par 2.

($E \neq \phi$ car $\mathbb{R}_- \subset E$ puisque $m(]-\infty, x[) > 0$.)

d'où E admet une Borne sup.

3.a) Montrons que : $0<c$

Soit $x \in \mathbb{R}_-$ on a $m(]-\infty, x[) > 0$ donc $x \in E$

d'où $\mathbb{R}_- \subset E$.

Soit $a \in \mathbb{R}_-$ on a : $\alpha = m(]-\infty, a[) > 0$

on a : $\frac{\alpha}{2} > a$ donc $m(]-\infty, \frac{\alpha}{2}[) \geq m(]-\infty, a[) > \frac{\alpha}{2}$

d'où $\frac{\alpha}{2} \in E$ (puisque $\widetilde{]-\infty, \frac{\alpha}{2}[} \supset \widetilde{]-\infty, a[}$)

d'où $c = \sup(E) > \frac{\alpha}{2} > 0$.

donc $\boxed{c>0}$

3.b) Montrons que : $\exists y \in E,\ y > c - \frac{1}{2f(c)}$ et $y>0$.

on a $c = \sup(E)$ d'après la caract de la borne sup alors $\exists y \in E :\ c \geq y > c - \varepsilon$

avec $\varepsilon = \mathrm{Min}(\frac{1}{2f(c)}, c)$.

donc $\varepsilon \leq \frac{1}{2f(c)}$ donc $y > c - \frac{1}{2f(c)}$.

et $\varepsilon \leq c$ donc $y > c - c = 0$.

d'où $\boxed{\exists y \in E :\quad c \geq y > c - \frac{1}{2f(c)} \text{ et } y>0}$.

3.c) * Montrons que : $y + \frac{1}{2f(c)} \in E$

$\forall A$ une partie finie de $]-\infty, y[$ on a : $A \cup \{c\}$ une partie finie de $]-\infty, y + \frac{1}{2f(c)}[$ car $0 < c < y + \frac{1}{2f(c)}$.

d'où $m(]-\infty, y[) + \frac{1}{2f(c)} \leq m(]-\infty, y + \frac{1}{2f(c)}[)$

or $y < m(]-\infty, y[$ car $y \in E$ donc $y + \frac{1}{2f(c)} < m(]-\infty, y + \frac{1}{2f(c)}[)$

donc $\boxed{y + \frac{1}{2f(c)} \in E}$

* Conclusion : $y + \frac{1}{2f(c)} \in E$ donc $y + \frac{1}{2f(c)} < c$ absurde

d'où $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

9