Devoir Maison N°6

Structures Algébriques

PROBLEME : SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R},+)$

1) **D**onner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.

On note, pour $a \in \mathbb{R}^+$, $a\mathbb{Z} = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$

2) **S**oit $a \in \mathbb{R}^+$. **M**ontrer que $(a\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

3) **S**oit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, $G \neq \{0\}$. **O**n considère : $\alpha = \inf\{x \in G \mid x>0\}$

a) **R**appeler la définition et une caractérisation de la borne inférieure

b) **S**upposons dans un premier temps $\alpha>0$ et montrons que $\alpha \in G$.
Supposons que $\alpha \notin G$.

i) **M**ontrer l'existence de $x \in G$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$

ii) **M**ontrer l'existence de $y \in G$ tel que : $\alpha < y < x$

iii) **M**ontrer, en considérant x-y que α n'est alors plus borne inférieure.

c) **E**n déduire $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

d) **M**ontrer $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. (Pour cela, on pourra utiliser, après justification, l'existence pour tout $g \in G$ de $n \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in [0,\alpha[$ tels que $g = n\alpha + \beta$)

e) **S**upposons maintenant $\alpha = 0$.

i) **A**-t-on $\alpha \in G$?

ii) **M**ontrer que : $\forall \varepsilon>0, \exists g \in G, \ 0 < g < \varepsilon$

iii) **E**n déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$, i.e.,
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x < y, \ \exists t \in G \mid x<t<y$

4) **D**onner un exemple de sous-groupe dense de $\mathbb{R}$

5) **O**n considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p+q\sqrt{2} \mid (p,q) \in \mathbb{Q}^2\}$

a) **M**ontrer que $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

b) **E**st-il dense ?

c) **M**ontrer que $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\times)$ est un corps.

6) **E**n utilisant un isomorphisme, déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

CORRIGE : SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R},+)$

1) Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$, le premier est discret l'autre est dense.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On note, pour $a \in \mathbb{R}^+$, $a\mathbb{Z} = \{na, n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(a\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

* $a\mathbb{Z}$ est bien une partie de $\mathbb{R}$. * $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z}$ non vide.

* Soit (x,y) deux éléments de $a\mathbb{Z}$. Il existe deux entiers relatifs n et p tels que $x = a\,n$ et $y = a\,p$.

Mais alors $x - y = (n - p)\,a \in a\mathbb{Z}$

Ainsi, par caractérisation des sous-groupes, **$a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$**

3) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, $G \neq \{0\}$. On considère : $\alpha = \inf\{x \in G \mid x>0\}$

a) Rappeler la définition et une caractérisation de la borne inférieure

$$\alpha = \inf_{\{x \in G \cap \mathbb{R}_+^*\}} \Leftrightarrow \alpha \text{ est le plus grand minorant de } G \cap \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in G \cap \mathbb{R}_+^*, \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon>0, \exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

b) Supposons dans un premier temps $\alpha>0$ et montrons que $\alpha \in G$. Supposons que $\alpha \notin G$.

i) Montrer l'existence de $x \in G$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$

Soit $\varepsilon = \alpha$. On a $\varepsilon > 0$ donc $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid \alpha \leq x < \alpha + \varepsilon = 2\alpha$. Mais $x \neq \alpha$ car $\alpha \notin G$

Ainsi il existe un élément x de G tel que : $\alpha < x < 2\alpha$

ii) Montrer l'existence de $y \in G$ tel que : $\alpha < y < x$

Soit $\varepsilon = x - \alpha$. On a $\varepsilon > 0$ donc $\exists y \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid \alpha \leq y < \alpha + \varepsilon = x$. Mais $y \neq \alpha$ car $\alpha \notin G$

Ainsi il existe un élément y de G tel que : $\alpha < y < x < 2\alpha$

iii) Montrer, en considérant x-y que α n'est alors plus borne inférieure.

x et y sont deux éléments du groupe G donc $x - y \in G$. Or $\alpha < y < x < 2\alpha$ donc $0 < x - y < \alpha$. Aussi $x - y$ est un élément de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à α ce qui est impossible car α est la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$

Aussi $\alpha \in G$

c) En déduire $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

G est stable par + et par passage à l'opposé donc, puisqu'il contient α, il contient aussi $\alpha\mathbb{Z}$: **$\alpha\mathbb{Z} \subset G$**

d) Montrer $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. (Pour cela, on pourra utiliser, après justification, l'existence pour tout $g \in G$ de $n \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in [0,\alpha[$ tels que $g = n\alpha + \beta$)

Soit $g \in G$. Soit $n = E\left(\frac{g}{\alpha}\right)$. On a $g - n\alpha \in [0, \alpha[$ par définition de la partie entière. On pose $\beta = g - n\alpha$.
Puisque G est stable par + et par passage à l'opposé, on a $\beta \in G$. Mais alors $\beta = 0$ sinon on aurait trouvé un élément de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à α ce qui est impossible car α est la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Aussi $g = n\alpha$.

D'où $G \subset \alpha\mathbb{Z}$

e) Supposons maintenant $\alpha = 0$.

i) A-t-on $\alpha \in G$? Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, on a **$\alpha = 0 \in G$**

ii) Montrer que : $\forall \varepsilon>0, \exists g \in G,\ 0 < g < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, $\exists g \in G \cap \mathbb{R}_+^* \mid 0 = \alpha \leq g < \alpha + \varepsilon = \varepsilon$. Mais $g \in \mathbb{R}_+^*$, donc $g \neq 0$

D'où : $\forall \varepsilon>0, \exists g \in G,\ 0 < g < \varepsilon$

iii) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$, i.e., $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists t \in G \mid x<t<y$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$. D'après la question précédente, $\exists g \in G,\ 0 < g < y - x$. Soit $n = E\left(\frac{x}{g}\right)$.

On a : $n\,g \leq x < (n + 1)\,g = ng + g < ng + y - x \leq y$. Ainsi $(n + 1)\,g \in G$ et $x < (n + 1)\,g < y$.

Aussi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists t \in G \mid x<t<y$ i.e. G est dense dans $\mathbb{R}$

4) Donner un exemple de sous-groupe dense de $\mathbb{R}$

On a déjà vu que $\mathbb{Q}$ était un sous groupe dense de $\mathbb{R}$. On peut aussi prendre **$\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{p+q\sqrt{2} \mid (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$**

5) On considère $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p+q\sqrt{2} \mid (p,q) \in \mathbb{Q}^2\}$

a) Montrer que $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ car il est non vide, stable par + et par passage à l'opposé.

b) Est-il dense ?

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est dense dans $\mathbb{R}$ car il contient $\mathbb{Q}$ qui est déjà dense dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\times)$ est un corps.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R},+,\times)$ car il est non vide, stable par +, par $\times$, par passage à l'opposé et de plus tout élément non nul $p+q\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a un inverse dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $\frac{p}{p^2 - 2q^2} - \frac{q}{p^2 - 2q^2}\sqrt{2}$

6) En utilisant un isomorphisme, déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

exp étant un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, **les sous-groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont de la forme $a^{\mathbb{Z}} = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$** avec $a > 0$ **ou denses dans $\mathbb{R}_+^*$**