Devoir Maison N°8

Fonctions Réelles

Dérivation

Problème : Une autre construction de la fonction exponentielle réelle

1. Pour tout $t > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $(1+t)^n \geqslant 1 + nt$.
   Caractériser les cas d'égalités.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Pour $n > |x|$, on pose $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   Etudier la stricte croissance.
   (b) Etudier de même la monotonie de la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$.
   (c) Pour $n > |x|$, prouver l'encadrement $0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}$.
   En déduire que les deux suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ convergent vers la même limite.

   On pose $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)$.

On va ensuite redémontrer toutes les propriétés bien connuesde la fonction exponentielle.

3. Montrer que $e^0 = 1$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^x e^{-x} = 1$.
4. Dans cette question, on prouve que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
   (a) Soit (λ_n) une suite qui converge vers 0. Montrer
   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ 1 + \lambda_n \leqslant \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\lambda_n}.$$
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$.
   (b) Conclure en choisissant λ_n de sorte que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$.
5. Dans cette question, on prouve que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$.
   (a) Pour $x \in]-1, 1[$, montrer que $1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.
   (b) En déduire que exp est dérivable en 0 et que $\exp'(0) = 1$.
   (c) Conclure.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Fin

Corrigé

Problème : Une autre construction de la fonction exponentielle réelle

1. Soit $n \geqslant 2$.
   Pour $t > -1$, on pose $\varphi(t) = (1+t)^n - 1 - nt$.
   φ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $t > -1$, $\varphi'(t) = n((1+t)^{n-1} - 1)$.
   Ainsi, pour tout $-1 < t < 0$, $\varphi'(t) < 0$ et, pour tout $0 < t$, $\varphi'(t) > 0$.
   On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
   On peut donc affirmer que, pour tout $t > -1$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)$ avec égalité si, et seulement si, $t = 0$.
   $\boxed{\text{Pour tout } t > -1,\ (1+t)^n \geqslant 1 + nt \text{ avec égalité si, et seulement si, } t = 0.}$

2. (a) Si $x = 0$ alors la suite $\boxed{(u_n(x))_{n>|x|} \text{ est constante donc croissante}}$.
   On suppose $x \neq 0$.
   Soit $n > |x|$.
   $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}.$$
   On a :
   $$\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + t_n(x)$$
   où $t_n(x) = -\frac{x}{(n+1)(x+n)}$. On a $t_n(x) \neq 0$ et $t_n > -1$.
   D'après la première inégalité, on en déduit que
   $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times (1 + t_n(x))^{n+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times (1 + (n+1)t_n(x)).$$
   Or $(1 + (n+1)t_n(x)) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$ donc $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > 1$.
   La suite $\boxed{(u_n(x))_{n>|x|} \text{ est strictement croissante}}$.

   (b) Si $x = 0$ alors la suite $\boxed{(v_n(x))_{n>|x|} \text{ est constante donc décroissante}}$.
   Supposons $x \neq 0$.
   Soit $n > |x|$.
   Par ce qui précède,
   $$\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n > 0.$$
   Par passage à l'inverse, on en déduit que
   $$\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-n-1} < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$
   Ainsi la suite $\boxed{(v_n(x))_{n>|x|} \text{ est strictement décroissante}}$.

   (c) Soit $n > |x|$. Le cas $x = 0$ est évident puisque $u_n(0) = v_n(0)$. On suppose donc $x \neq 0$.
   $$v_n(x) - u_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = v_n(x) \times \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).$$

Puisque $n > |x|$ alors $0 \leqslant \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$ puis $0 \leqslant v_n(x) - u_n(x)$.

Or $n > |x|$ donc $-\frac{x^2}{n^2} > -1$. D'après la première question (l'égalité étant également valide si $n=1$), on obtient

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{x^2}{n}.$$

D'où les inégalités $\boxed{0 \leqslant v_n(x)-u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}}$.

Comme $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante, on en déduit que, pour tout $n > |x|$,

$$0 \leqslant v_n(x)-u_n(x) \leqslant v_{\lfloor |x| \rfloor}(x)\frac{x^2}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)-u_n(x) = 0$.

Les deux suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = e^0$.

   Par unicité de la limite, on en déduit que $\boxed{e^0 = 1}$.

   Si $x = 0$ alors $e^0 = 1 > 0$.

   Si $x \neq 0$. La suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est strictement croissante donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) > u_{\lfloor |x| \rfloor+1}(x) > 0$.

   Ainsi $\boxed{e^x > 0}$.

   Pour tout $n > |x|$, $u_n(x) \times v_n(-x) = 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = e^x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(-x) = e^{-x}$. Ainsi $\boxed{e^x e^{-x} = 1}$.

4. (a) Soit N un rang à partir duquel $-1 < \lambda_n < 1$. Posons $n_0 = \max(N, 2)$. Soit $n \geqslant n_0$.
   D'après la première question, on a : $1+\lambda_n \leqslant \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n$ et $1-\lambda_n \leqslant \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n$
   Ainsi

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n &= \left(1-\frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)^n \times \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-n} \\ &\leqslant \left(1-\frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)^n \times \frac{1}{1-\lambda_n} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\lambda_n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ 1+\lambda_n \leqslant \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\lambda_n}.}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\lambda_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda_n} = 1$ alors par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1}$.

   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\lambda_n = \frac{(n+x)(n+y)}{n+x+y} - n$ de sorte que $\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)\left(1+\frac{x+y}{n}\right)$.
   On a :

$$\lambda_n = \frac{(n+x)(n+y)}{n+x+y} - n = \frac{xy}{n+x+y} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^{x+y}$, donc, en passant à la limite dans l'égalité

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = \left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)\left(1+\frac{x+y}{n}\right)$$

on obtient $\boxed{e^x \times e^y = e^{x+y}}$.

5. (a) Soit $x \in]-1,1[$.
Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $1+x \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $1+x \leqslant \exp(x)$.
Ainsi $1-x \leqslant e^{-x}$. En passant à l'inverse, on obtient $\frac{1}{e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-x}$. Or, d'après une question précédente, $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } x \in]-1,1[,\ 1+x \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}}$.

(b) Pour tout $x \in]-1,1[$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$.
Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, $1 \leqslant \frac{e^x - e^0}{x-1} \leqslant \frac{1}{1-x}$.
Le théorème d'encadrement permet d'affirmer que exp est dérivable à droite en 0 et que $\exp'_d(0) = 1$.
Et, pour tout $x \in]-1,0[$, $\frac{1}{1-x} \leqslant \frac{e^x-e^0}{x-1} \leqslant 1$.
Le théorème d'encadrement permet d'affirmer que exp est dérivable à gauche en 0 et que $\exp'_g(0) = 1$.
On en déduit que $\boxed{\text{exp est dérivable en 0 et que } \exp'(0) = 1}$.

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{e^{y+h} - e^y}{h} = e^y \times \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} e^y \times \exp'(0) = e^y.$$

Ainsi exp est dérivable en y et $\exp'(y) = \exp(y)$. Ainsi $\boxed{\text{exp est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et que } \exp' = \exp}$.

6. Soit $x \geqslant 1$.
Par ce qui précède (croissance de la suite $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$), pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left(\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant e^x$.
Ainsi $\frac{e^x}{x^n} \geqslant \frac{x}{(n+1)^n}$ puis $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$.
On en déduit que $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$.
Or $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0}$.

* * * FIN DU CORRIGÉ * * *