Devoir Maison N°9

Fonctions Usuelles

Problème : Formules à la John Machin

Le problème est consacré à quelques-unes de très nombreuses formules qui expriment $\frac{\pi}{4}$ sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients entiers d'arc-tangentes d'inverses d'entiers.
La plus célèbre est

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

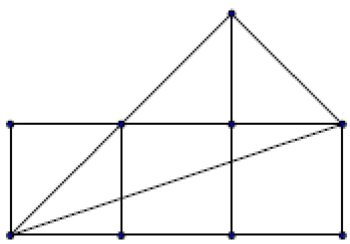
due à John Machin.
Pour cette raison, les formules du types

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{p} a_k \arctan\frac{1}{b_k}$$

où $a_1, \cdots, a_p$ sont des entiers non nuls et $b_1, \cdots, b_p$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 2, sont souvent appelées formules à la « Machin ».

Partie N° 1 : Machin et Fibonacci

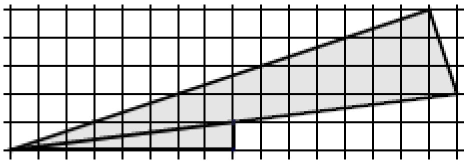
1. Cette question doit être traitée uniquement par la géométrie.
   (a) Observer la figure ci-contre



et montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

(b) Observer la figure ci-contre



et montrer que

$$\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}.$$

En déduire une nouvelle formule à la « Machin ».

2. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $F_n \in \mathbb{N}^\star$.
   Il est alors légitime de poser, pour tout $n \geqslant 1$, $G_n = \arctan\frac{1}{F_n}$.
   (b) Prouver l'égalité
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n.$$
   (c) En déduire que
   $$\forall n \geqslant 1,\ G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}$$
   .
   (d) Pour tout $n \geqslant 2$, en déduire les formules à la « Machin »
   $$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan\frac{1}{F_{2k+1}} - \arctan\frac{1}{F_{2n}}.$$

Partie N° 2 Machin et Lehmer

1. Dans cette question, $z = a + ib$ est un nombre complexe donné, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^\star$.
   (a) Exprimer l'argument de z (modulo π) en fonction de $\arctan\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$ et préciser le cas $a = 0$.
   (b) On pose $\varphi(z) = (-n + i)z$ où n est la partie entière de $\frac{a}{b}$.
   Montrer que si $b > 0$ alors $0 \leqslant \mathrm{Im}(\varphi(z)) < b$ et que si $b < 0$ alors $b < \mathrm{Im}(\varphi(z)) \leqslant 0$.
2. Dans cette question, on suppose que a et b sont des entiers relatifs non nuls.
   On définit une suite $z_0, z_1, \cdots, z_k, \cdots$, de premier terme $z_0 = a + ib$, de la façon suivante :
   Si z_k est connu et si $\mathrm{Im}\, z_k \neq 0$, on pose $z_{k+1} = \varphi(z_k)$.
   (a) Montrer que la suite (z_k) est finie.
   Il en résulte qu'il existe un plus petit entier p tel que $\mathrm{Im}(z_p) = 0$.
   (b) En déduire l'existence d'entiers $n_0, \cdots, n_{p-1}$ tels que
   $$\arctan\frac{b}{a} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \arctan\frac{1}{n_k}\ [\pi].$$
   On prendra pour convention que $\arctan\frac{1}{n_k} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ si $n_k = 0$.

3. L'algorithme passant de $z = a + ib$ à la liste $[n_0, \cdots, n_{p-1}]$ est du à Lehmer.
   Écrire un programme Python prenant en entrée un complexe z sous la forme $a+ib$ et renvoyant la liste $[n_0, \cdots, n_{p-1}]$.
   On rappelle qu'en Python, `floor(x)` retourne la partie entière de x, que `complex(0,1)` désigne le nombre complexe i et que `z.real` et `z.imag` retournent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du complexe z.

Partie N° 3 : Machin et Gregory

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $u_n'(t) = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n R_n(t)$ où $R_n(t) = \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$, $u_n(x) = \arctan(x) + (-1)^n \int_0^x R_n(t)\, dt$.
3. En remarquant que, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant R_n(t) \leqslant t^{2n+2}$, montrer que
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1}(x) \leqslant \arctan(x) \leqslant u_{2n}(x)$.
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\arctan(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$.
4. Soit $x \in [0, 1]$. Déduire que la suite $(u_n(x))$ converge vers $\arctan(x)$.
5. Soit
   $$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{p} a_j \arctan \frac{1}{b_j} \qquad (\star)$$
   une formule à la « Machin ».
   On suppose par exemple $2 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
   $$v_n = 4 \sum_{j=1}^{p} a_j u_n\left(\frac{1}{b_j}\right).$$
   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pi$ et justifier que si on recherche la rapidité de la convergence vers π on doit privilégier les formules $(\star)$ avec la plus grande valeur de b_1 possible.
6. Dans le cas où $(\star)$ est la formule de John Machin, donner un entier n à partir duquel nous avons
   $$|v_n - \pi| \leqslant 100^{-100}.$$
   Donnée numérique : Si $n \geqslant 70$ *alors* $\frac{2}{(2n+1) \times 25^{n+1}} \leqslant 100^{-100}$.

Fin

Devoir Surveillé Blanc **MPSI**
Correction **2021–2022**

Problème : Birapports et un théorème de Miquel

1. Comme a, b et c sont alignés et deux à deux distincts alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ tel que $(c-a) = \lambda(c-b)$. Ainsi, $[a,b,c,d] = \lambda \times \frac{d-a}{d-b}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^\star$.
Ainsi, $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $d-a = \mu(d-b)$ si, et seulement si, a, b et d sont alignés.
On a donc prouvé que $\boxed{a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ sont alignés si, et seulement si, } [a,b,c,d] \in \mathbb{R}}$.

2. Supposons (x,y) solution du système.
En calculant $b'L_1 - bL_2$, nous obtenons $(ab'-ba')x = cb'-c'b$. Comme $ab'-ba' \neq 0$ alors $x = \frac{cb'-c'b}{ab'-ba'}$.
De même, en calculant $a'L_1 - aL_2$, nous obtenons $y = \frac{ca'-c'a}{ab'-ba'}$.
Réciproquement, on vérifie que $(x,y) = \left(\frac{cb'-c'b}{ab'-ba'}, \frac{ca'-c'a}{ab'-ba'}\right)$ est bien solution du système.
$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{cb'-c'b}{ab'-ba'}, \frac{ca'-c'a}{ab'-ba'}\right)\right\}}$.

3. (a) « ω est équidistant de a, b et c » si, et seulement si, $|\omega-a| = |\omega-b| = |\omega-c|$ si, et seulement si, $|\omega-a|^2 = |\omega-b|^2 = |\omega-c|^2$ si, et seulement si, $(\omega-a)(\overline{\omega-a}) = (\omega-b)(\overline{\omega-b}) = (\omega-c)(\overline{\omega-c})$. En développent, on obtient que « ω est équidistant de a, b et c » si, et seulement si,
$$\boxed{\left\{\begin{array}{lllll} \overline{(b-a)}\omega & + & (b-a)\overline{\omega} & = & |b|^2-|a|^2 \\ \overline{(b-c)}\omega & + & (b-c)\overline{\omega} & = & |b|^2-|c|^2 \end{array}\right. .}$$

   (b) Comme a, b et c sont deux à deux distincts alors $\overline{(b-a)} \times (b-c) - (b-a) \times \overline{(b-c)} = 0$ si, et seulement si, $\overline{\left(\frac{b-a}{b-c}\right)} = \frac{b-a}{b-c}$ si, et seulement si, $\frac{b-a}{b-c} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b-a = \lambda(b-c)$ si, et seulement si, a, b et c sont alignés. Cela est exclus par hypothèse et on a donc montré que
$$\overline{(b-a)} \times (b-c) - (b-a) \times \overline{(b-c)} \neq 0.$$
Selon 2., le système
$$\left\{\begin{array}{lllll} \overline{(b-a)}\omega & + & (b-a)\overline{\omega} & = & |b|^2-|a|^2 \\ \overline{(b-c)}\omega & + & (b-c)\overline{\omega} & = & |b|^2-|c|^2 \end{array}\right.$$
possède une unique solution et, selon 3.(a), il existe ainsi un point $\omega \in \mathbb{C}$ équidistant à la fois de a, de b et de c.
Le cercle de centre ω et de rayon $|\omega-a|$ passe par a, b et c et nous avons donc prouvé que $\boxed{\text{les points } a,\ b \text{ et } c \text{ sont cocycliques}}$.

4. (a) Par les formules d'Euler, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] &= \frac{(e^{i\gamma} - e^{i\alpha})(z - e^{i\beta})}{(z - e^{i\alpha})(e^{i\gamma} - e^{i\beta})} \\
&= \frac{e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}}} \times \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{z - e^{i\beta}}{z - e^{i\alpha}} \\
&= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{z - e^{i\beta}}{z - e^{i\alpha}} \\
&= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{(z - e^{i\beta})(\overline{z} - e^{-i\alpha})}{|z - e^{i\alpha}|^2} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{1}{|z - e^{i\alpha}|^2} \times \left(|z|^2 e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} z\right) + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\boxed{\mathrm{Im}([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]) = \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{|z|^2 - 1}{|z - e^{i\alpha}|^2}.}
$$

(b) Comme $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont distincts alors $\alpha - \beta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Ainsi, $\frac{\alpha-\beta}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$. En particulier, $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \neq 0$. Il en est de même pour $\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)$.
Ainsi, $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]) = 0$ si, et seulement si, $\frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2} = 0$ si, et seulement si, $|z|^2 - 1 = 0$ si, et seulement si, $|z| = 1$.
On a donc prouvé que $\boxed{[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } z \in \mathbb{U}}$.

5. Par définition,

$$
\begin{aligned}
[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu] &= \frac{((\lambda c + \mu) - (\lambda a + \mu))((\lambda d + \mu) - (\lambda b + \mu))}{((\lambda d + \mu) - (\lambda a + \mu))((\lambda c + \mu) - (\lambda b + \mu))} \\
&= \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} \\
&= [a, b, c, d].
\end{aligned}
$$

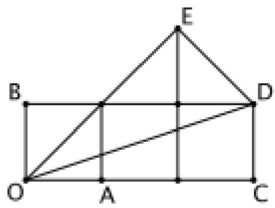
$$
\boxed{[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \lambda c + \mu, \lambda d + \mu] = [a, b, c, d].}
$$

6. " $\Rightarrow$ " : Notons ω le centre et $R > 0$ le rayon d'un cercle passant par a, b, c et d.
Il existe ainsi α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $a = \omega + Re^{i\alpha}$, $b = \omega + Re^{i\gamma}$, $c = \omega + Re^{i\delta}$ et $d = \omega + Re^{i\delta}$.
D'après 5., nous avons $[a, b, c, d,] = [e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}]$. Puis, d'après 4.(b), $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}] \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.
" $\Leftarrow$ " : Notons ω le centre et $R > 0$ le rayon d'un cercle passant par a, b et c dont l'existence est assurée par 3.(b).
Il existe ainsi α, β et γ tels que $a = \omega + Re^{i\alpha}$, $b = \omega + Re^{i\gamma}$ et $c = \omega + Re^{i\delta}$.
Posons $z = \frac{d-\omega}{R}$.
D'après 5., nous avons $[a, b, c, d,] = [\omega + Re^{i\alpha}, \omega + Re^{i\beta}, \omega + Re^{i\gamma}, \omega + Rz] = [e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]$.
Par hypothèse, on peut ainsi affirmer que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbb{R}$. D'après 4.(b), cela signifie que $z \in \mathbb{U}$. d est donc sur le cercle de centre ω et de rayon R.
On a donc prouvé que $\boxed{a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ sont cocycliques si, et seulement si, } [a, b, c, d] \in \mathbb{R}}$.

Problème : Formules à la John Machin

Partie N^o 1 : Machin et Fibonacci

1. (a)



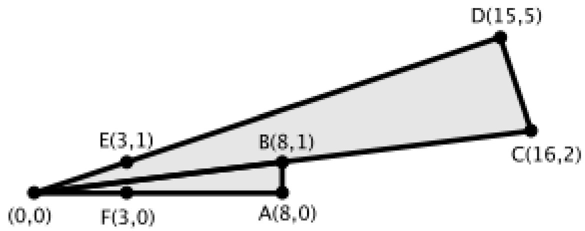
On se place dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
On a les coordonnées : $C(3,0)$, $D(3,1)$ et $E(2,2)$.
Soient $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}})$ et $\beta = (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}})$. On a

$$\tan(\alpha) = \frac{CD}{OC} = \frac{1}{3} \text{ et } \tan(\beta) = \frac{DE}{OE} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\alpha = \arctan \frac{1}{3}$ et $\beta = \arctan \frac{1}{2}$ puisque $\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Mais $\alpha + \beta = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{4}$. On a donc obtenu :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.}$$

(b)



Dans un repère convenable, on a les coordonnées indiquées ci-dessus. On voit que O, E, D sont alignés, de même que les points O, B, C, de même que les points O, F, A. On constate que les angles en A et D sont droits. On définit les angles $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$, $\beta = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}})$

et $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}})$. On a $\tan(\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{8}$ et $\tan(\beta) = \frac{CD}{OD} = \frac{1}{5}$. Or $\alpha + \beta = \gamma$ avec $\tan(\gamma) = \frac{EF}{OF} = \frac{1}{3}$. Comme $\alpha, \beta, \gamma \in]-\pi/2, \pi/2[$, on en déduit

$$\boxed{\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}.}$$

2. (a) On montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^\star$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $F_n \in \mathbb{N}^\star$ ".
   - $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies puisque $F_1 = 1$ et $F_2 = 2$.
   - Supposons donné $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $F_n, F_{n+1} \in \mathbb{N}^\star$. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ alors $F_{n+2} \in \mathbb{N}^\star$.

   La récurrence double est achevée et $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ F_n \in \mathbb{N}^\star}$.

   (b) On montre par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ " $F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n$ ".
   - $\mathcal{P}(0)$ est vrai puisque $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ et donc $F_1^2 = F_0F_2 + 1$.
   - Supposons donnée $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Par hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} = F_nF_{n+2} + (-1)^n + F_{n+1}F_{n+2} \\ &= F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^n = F_{n+2}^2 + (-1)^n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $F_{n+2}^2 = F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n}$.

   (c) D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2n+1}^2 = F_{2n}F_{2n+2} + 1.$$

   On peut ainsi écrire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2n+1}(F_{2n+2} - F_{2n}) = F_{2n}F_{2n+2} + 1$$

   c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} = \frac{1}{F_{2n}}.$$

   On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \tan(G_{2n+1} + G_{2n+2}) &= \tan\left(\arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}} \\ &= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} = \frac{1}{F_{2n}}. \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \arctan(\tan(G_{2n+1} + G_{2n+2})) = G_{2n}.$$

   Or $F_{2n+1} \geqslant 1$ et $F_{2n+2} \geqslant 1$ donc $G_{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{4}$ et $G_{2n+2} \leqslant \frac{\pi}{4}$ donc $G_{2n+1} + G_{2n+2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. On peut ainsi affirmer que $\arctan(\tan(G_{2n+1} + G_{2n+2})) = G_{2n+1} + G_{2n+2}$. On en déduit que $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}}$.

(d) Par la question précédente, pour tout $k \geqslant 1$, $G_{2k+1} = G_{2k} - G_{2k+2}$.
Par télescopage, nous obtenons

$$\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n} G_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} (G_{2k} - G_{2k+2}) = G_2 - G_{2n}.$$

Or $G_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ donc,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan \frac{1}{F_{2k+1}} - \arctan \frac{1}{F_{2n}}.}$$

Partie N° 2 Machin et Lehmer

1. (a) Notons $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ un argument modulo π de z et θ' un argument modulo 2π de z (il est possible d'exclure $\pi/2$ puisque b est non nul et que z ne peut donc être imaginaire pur).
Si $a = 0$ alors $\theta = 0$.
Sinon, comme tan est π-périodique alors

$$\tan(\theta) = \tan(\theta') = \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')} = \frac{b}{|z|} \times \frac{|z|}{a} = \frac{a}{b}.$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ alors $\theta = \arctan(\tan(\theta)) = \arctan \frac{b}{a}$.
On conclut que $\boxed{\arg(z) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0, \\ \arctan \frac{b}{a} & \text{sinon.} \end{cases}}$

(b) $\varphi(z) = (-n+i)z = (-n+i)(a+ib) = -na - b + ia - ibn$ et donc $\operatorname{Im}(\varphi(z)) = a - bn$.
$n = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ donc $\frac{a}{b} - 1 < n \leqslant \frac{a}{b}$.
Si $b > 0$, on obtient $a - b < nb \leqslant a$ puis $\boxed{0 \leqslant \operatorname{Im}(\varphi(z)) < b}$.
Si $b < 0$, on obtient $a \leqslant nb < a - b$ puis $\boxed{b < \operatorname{Im}(\varphi(z)) \leqslant 0}$.

2. (a) Raisonnons par l'absurde et supposons la suite (z_k) infini.
Par la question précédente, la suite $(|\operatorname{Im}(z_k)|)$ est strictement décroissante. Mais par hypothèse, cette suite est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Or, il est impossible d'avoir une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ strictement décroissante car une telle suite prend à la fois un nombre infini et un nombre fini de valeurs possibles.
On conclut que la suite $\boxed{(z_k) \text{ est finie}}$.

(b) En notant $n_0, n_1, \cdots, n_{p-1}$ les entiers obtenus par la définition de $\varphi(z_0), \varphi(z_1), \cdots, \varphi(z_{p-1})$, nous avons la relation

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant p-1,\ \arg(\varphi(z_k)) \equiv -\arctan \frac{1}{n_k} + \arg(z_k)\ [\pi].$$

Par ailleurs,

$$z_p = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{p\ fois}(z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \equiv \arg(z_p)\ [\pi] &\equiv \arg(\varphi \circ \cdots \circ \varphi(z))\ [\pi] \\ &\equiv -\arctan \frac{1}{n_{p-1}} - \cdots - \arctan \frac{1}{n_0} + \arctan \frac{a}{b}\ [\pi]. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\arctan \frac{b}{a} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \arctan \frac{1}{n_k}\ [\pi]}$.

3.
```
# -*- coding: latin1 -*-

import math as m

def phi(z):
    a,b=z.real,z.imag
    return (-m.floor(a/b)+complex(0,1))*z

def Lehmler(z):
    Liste=[]
    a,b=z.real,z.imag
    while b!=0:
        Liste.append(m.floor(a/b))
        z=phi(z)
        a,b=z.real,z.imag
    return Liste
```

Partie N° 3 : Machin et Gregory

1. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$u_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

$\boxed{\text{Pour tout } t \in [0,1], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n'(t) = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n R_n(t).}$

2. Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\ dt \\ =0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt + (-1)^n \int_0^x R_n(t)\ dt \\ = \arctan(x) + (-1)^n \int_0^x R_n(t)\ dt.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in [0,1],\ u_n(x) = \arctan(x) + (-1)^n \int_0^x R_n(t)\ dt.}$

3. (a) Par positivité de l'intégrale, nous avons

$$u_{2n+1}(x) = \arctan(x) - \int_0^x R_n(t)dt \leqslant \arctan(x).$$

$$u_{2n}(x) = \arctan(x) + \int_0^x R_n(t)\ dt \geqslant \arctan(x).$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1}(x) \leqslant \arctan(x) \leqslant u_{2n}(x)}$.

(b) Par l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\arctan(x) - u_n(x)| &= \left|\int_0^x R_n(t)\ dt\right| \\ &\leqslant \int_0^x |R_n(t)|\ dt \\ &\leqslant \int_0^x t^{2n+2}\ dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |\arctan(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}}$.

4. Soit $x \in [0,1]$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{(u_n(x)) \text{ converge vers } \arctan(x)}$.
5. D'après la question précédente et par opérations usuelles sur les limites, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 4\sum_{j=1}^{p} a_j \arctan\left(\frac{1}{b_j}\right) = \pi.}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\pi - v_n| &= 4\left|\sum_{j=1}^{p} a_j \arctan\left(\frac{1}{b_j}\right) - \sum_{j=1}^{p} a_j u_n\left(\frac{1}{b_j}\right)\right| \\ &\leqslant 4\sum_{j=1}^{p} |a_j| \times \left|\arctan\left(\frac{1}{b_j}\right) - u_n\left(\frac{1}{b_j}\right)\right|.\end{aligned}$$

Puis, d'après 3.(b), nous établissons

$$|\pi - v_n| \leqslant \frac{4}{2n+3} \times \sum_{j=1}^{p} \frac{|a_j|}{b_j^{2n+3}}.$$

Comme $2 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_p$ alors :

$\boxed{\text{La rapidité de la convergence de } (v_n) \text{ vers } \pi \text{ est d'autant plus rapide que valeur de } b_1 \text{ est grande.}}$

6. La formule de John Machin est

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Dans ce cas, $p = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $b_1 = 5$ et $b_2 = 239$ et, par la question précédente,

$$\begin{aligned}|\pi - v_n| &\leqslant \frac{4}{2n+3}\left(\frac{4}{5^{2n+3}} + \frac{1}{239^{2n+3}}\right) \\ &\leqslant \frac{4}{2n+3}\left(\frac{4}{5^{2n+3}} + \frac{1}{5^{2n+3}}\right) \\ &\leqslant \frac{20}{2n+3} \times \frac{1}{5^{2n+3}} \\ &\leqslant \frac{20}{2n+3} \times \frac{1}{25^n \times 125} \leqslant \frac{4}{(2n+3)\times 25^{n+1}} \leqslant \frac{2}{(2n+1)\times 25^{n+1}}.\end{aligned}$$

Selon la donnée numérique fournie, $\boxed{\text{dès que } n \geqslant 70, \text{ alors } |v_n - \pi| \leqslant 100^{-100}}$.

* * * FIN DU CORRIGE * * *