Exercice 1 : Autour de la fonction indicatrice

Soit E un ensemble non vide, pour toute partie A de E, on considère la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array}\right. \end{array}$$

Cette fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée fonction caractéristique de A. On notera dans la suite du problème $\bar{A} = C_E A$ le complémentaire de A dans E.

1. Tracer la fonction $\mathbb{1}_A$ dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et $A = [-4,-1] \cup [1,5]$.
2. Expliciter les fonctions $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.
3. Démontrer les formules suivantes avec A et B des parties de E :
   (a) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
   (b) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
   (c) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
   (d) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
   (e) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
   (f) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
   (g) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.

   On rappelle que deux fonctions sont égales si et seulement si elles coïncident en tous les éléments de E.
4. On définit la différence symétrique de deux parties A et B de E par : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
   (a) Montrer que : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   (b) Préciser $A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$.
   (c) Vérifier que $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Comparer $A\Delta B$ et $\bar{A}\Delta\bar{B}$.
   (d) Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
   (e) Soit A, B, C trois sous-ensembles de E, en utilisant la propriété démontrée à la question précédente et les questions 3.(a) et 3.(c), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

   Montrer que Γ est une bijection.
6. Soit F un deuxième ensemble, B une partie de F et $f : E \to F$ une application. Montrer que :

$$\mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f$$

Simulation DS N° 2

Nombres Complexes
Ensembles & Applications

Exercice Nombres Complexes

$$\textit{Calcul de } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \textit{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Nous allons voir deux méthodes pour faire ces calculs.

1. **Méthode 1.** On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on considère l'équation $(E) \;:\; z^5 - 1 = 0$.
   (a) i. Exprimer les solutions de l'équation (E) à l'aide de ω. Parmi ces nombres complexes reconnaitre $\overline{\omega}$ et ω^{-1}. On pose $z = \omega + \omega^{-1}$.
   ii. Démontrer que $z \in \mathbb{R}$.
   iii. Quel est le signe de z ?
   iv. Trouver une équation de degré 2 vérifiée par z.
   (b) En déduire les valeurs de z, puis de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. **Méthode 2.**
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$, on n'utilisera pas la fonction cos dans le résultat.
   (b) Résoudre l'équation $(F) \;:\; 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
   (c) Démontrer que les solutions de (F) sont $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (d) En déduire des expressions de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   On retrouve ainsi la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2 : Quelques bijections

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques bijections mettant en jeu l'ensemble $\mathbb{N}$. La plupart des questions peuvent être traitées séparément.

1. Donner deux bijections de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que l'application f suivante est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

3. On considère l'application g suivante :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (k,n) & \mapsto & 2^k(2n+1)-1 \end{array}$$

   (a) Montrer que tout nombre entier non nul s'écrit sous la forme $2^k(2n+1)$ où n et k sont des entiers naturels.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, montrer que m admet un antécédent par g.
   (c) Montrer que g est injective.
   (d) En déduire que g est une bijection.

4. Démontrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{N}$ où p est un entier non nul. On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'application g définie à la question précédente. On ne cherchera pas à donner une formule explicite pour cette bijection.
5. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. On n'ambitionnera pas de donner une démonstration rigoureuse ou une formule explicite mais une description détaillée suffira.
6. Le but de cette question est de démontrer qu'il n'y a pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par l'absurde, on se donne une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on note φ.

   (a) Soient $(a,b,x) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a < b$. Démontrer que l'on peut trouver $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq a' < b' \leq b$ et $x \notin [a',b']$.
   (b) On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :
   - $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$
   - pour un entier naturel n fixé, on suppose avoir défini a_n et b_n et on choisit a_{n+1} et b_{n+1} tels que :

   $$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \text{ et } \varphi(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

   Montrer qu'il est possible de définir ainsi a_{n+1} et b_{n+1}.
   (c) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent. On notera λ et μ les limites respectives.
   (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq \lambda \leq b_n$.
   (e) En déduire une absurdité et conclure.

7. Le but de cette question est de démontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. Par l'absurde, on se donne $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ une bijection. Utiliser la fonction suivante pour trouver une absurdité puis conclure :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \varphi(n)(n)+1 \end{array}$$