Simulation Concours Blanc N°1

Nombres Réels

Problème 1

On considère l'ensemble $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$.On dit qu'une application $f: \quad E \longrightarrow E$ est *croissante* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y).$$

1.) Soit A une partie non vide de E. Justifier que $\sup(A)$ et $\sup f(A)$ existent et appartiennet à E.

On dit que f est *sup-stable* si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; f(\sup(A)) = \sup f(A).$$

2.) Soient deux applications $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ qui sont sup-stables.

2.a) Vérifier que : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

2.b) En déduire que $g \circ f$ est sup-stable.

3.) Montrer que si une application $f: \quad E \longrightarrow E$ est croissante, alors pour toute partie non vide A de E, on a $\sup f(A) \leq f(\sup(A))$.

4.) Exhiber un exemple d'application $f: \quad E \longrightarrow E$ qui est croissante mais qui n'est pas sup-stable.

5.) Montrer que si $f: \quad E \longrightarrow E$ est sup-stable, alors f est croissante.

On considère désormais une application $f: \quad E \longrightarrow E$ qui est sup-stable.
On notera $\quad Fix(f) = \{x \in E / f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.
On pose $\quad X = \{x \in E / f(x) \leq x\}$.

6.) Montrer que X possède une borne inférieure $\alpha \in E$.

7.) Montrer que α est le plus petit élément de $Fix(f)$.

On définit l'ensemble $Y = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}\}$ où $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ avec $f^0 = Id_E$.

8.) Justifier que Y possède une borne supérieure β dans E.

9.) Montrer que $f(Y) = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}^*\}$ et que $\quad \sup(Y) = \sup f(Y)$.

10.) Montrer que $\beta = \alpha$.

Partie entière

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor$.

Exercice 2

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 4

Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $\mathcal{A} = \left\{1-\frac{2}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $\mathcal{B} = \left\{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n},\ (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\right\}$;
3. $\mathcal{C} = \left\{1-\frac{1}{n-m},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n\right\}$;
4. $\mathcal{D} = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$;
5. $\mathcal{E} = \left\{\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
6. $\mathcal{F} = \left\{\frac{n+2}{n+1}+\frac{q-1}{q+1},\ (n,q) \in \mathbb{N}^2\right\}$;
7. $\mathcal{G} = \left\{\frac{mn}{m^2+mn+n^2},\ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

Fin

on a A est non vide donc $\exists x \in E,\ x \in A$

donc $0 \leq x \leq \sup(A)$ d'où $\boxed{\sup(A) \in E}$

on a $f(A) \neq \phi$ car $A \neq \phi$ et $f(A) \subset E$ ($f : E \longrightarrow E$).

d'où $f(A)$ est majorée par 1 d'où $f(A)$ admet une Borne Sup

et de même on a $\boxed{\sup(f(A)) \in E}$

2-a) Vérifions que : $\forall A \in \mathcal{P}(E) :\ g \circ f(A) = g(f(A))$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$; on supp que $A \neq \phi$.

$$x \in g\circ f(A) \Leftrightarrow \exists y \in A :\ x = g\circ f(y)$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in A :\ x = g(f(y))$$
$$\Leftrightarrow \exists z \in f(A) :\ x = g(z)$$
$$\Leftrightarrow x \in g(f(A))$$

d'où $\boxed{g\circ f(A) = g(f(A))}$ $(g\circ f(\phi) = g(f(\phi)) = \phi)$.

2.b) Déduction de : $g\circ f$ est sup-stable.

Soit $A \neq \phi$.

$$g\circ f(\sup(A)) = g(f(\sup(A)))$$
$$= g(\sup(f(A))) \quad (f \text{ est sup-stable})$$
$$= \sup(g(f(A))) \quad (g \text{ est sup-stable})$$
$$= \sup(g\circ f(A))$$

d'où $\boxed{g\circ f \text{ est sup-stable}}$

---

3) Mq : $f : E \longrightarrow E$ est croissante $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) - \{\phi\} :\ \sup(f(A)) \leq f(\sup(A))$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \neq \phi$ et $f : E \longrightarrow E$ est croissante.

Soit $x \in A$, on a : $x \leq \sup(A)$ donc $f(x) \leq f(\sup(A))$

d'où $\forall x \in A$: $f(x) \leq f(\sup(A))$ d'où $f(\sup(A))$ est un majorant de $f(A)$ d'où $\boxed{\sup(f(A)) \leq f(\sup(A))}$

4°) Un exemple d'app $f: E \longrightarrow E$ croissante, mais pas sup stable.

Soit $f: E \longrightarrow E$
$x \longmapsto E(x)$ ($E(x)$: partie entière de x).

on pose $A = [0,1[\subset E$ et $A \neq \phi$.

on a $f(A) = \{0\}$ donc $\sup(f(A)) = 0$.

$\sup(A) = 1$ et $f(1) = 1$.

d'où $\sup(f(A)) \neq f(\sup(A))$.

d'où $\boxed{f \text{ n'est pas sup-stable mais } f \text{ est croissante}}$.

5°) Montrons que : $f: E \longrightarrow E$ est sup-stable $\Rightarrow$ f est croissante.

soient $x, y \in E$ tels que $x \leq y$ Montrons donc que $f(x) \leq f(y)$

on pose $A = \{x, y\}$. on a $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$

d'où $f(y) = \sup(f(A)) = \sup\{f(x), f(y)\}$

d'où $f(x) \leq f(y)$

donc $\boxed{f \text{ est croissante}}$

6°) Montrons que X possède une Borne Inférieure $\alpha \in E$

on a $X \neq \phi$ car $f(1) \leq 1$ donc $1 \in X$.

donc X possède une Borne Inf posons $\alpha = \mathrm{Inf}(X)$.

donc $\alpha \leq 1$ car α est un minorant de X et $1 \in X$.

on a $X \subset E$ donc 0 est un minorant de X

d'où $0 \leq \alpha$ donc $0 \leq \alpha \leq 1$ d'où $\boxed{\alpha \in E}$

7°) Montrons que $\alpha = \mathrm{Min}(\mathrm{Fix}(f))$.

soit $x \in X$ ona : $\alpha \leq x$ d'où $f(\alpha) \leq f(x)$ (f est croissante car f est sup-stable)

d'où $\forall x \in X$: $f(\alpha) \leq x$ car $\forall x \in X$ $f(x) \leq x$.

d'où $f(\alpha)$ est un minorant de X

d'où $\boxed{f(\alpha) \leq \alpha}$ ① ($\alpha = \mathrm{Inf}(X)$)

donc $f(f(\alpha)) \leq f(\alpha)$ (f croissante)

d'où $f(\alpha) \in X$ d'où $\boxed{\alpha \leq f(\alpha)}$ ②

de ① et ② ona $f(\alpha) = \alpha$.

d'où $\boxed{\alpha \in \mathrm{Fix}(f)}$ ③

$\forall x \in \mathrm{Fix}(f)$: $x \in X$ d'où $\forall x \in \mathrm{Fix}(f)$: $\alpha \leq x$.

d'où α est un minorant de $\mathrm{Fix}(f)$ et d'après ③

d'où $\boxed{\alpha = \mathrm{Min}(\mathrm{Fix}(f))}$

8°) Justifions que Y possède une borne sup β ds E.

Puisque $f(E) \subset E$ d'où $Y = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}\} \subset E$

et $0 \in Y$ d'où Y est non vide majorée (par 1)

donc Y admet une Borne Sup ; posons $\beta = \mathrm{Sup}(Y)$

Comme $Y \subset E$ d'où $0 \leq \beta \leq 1$ donc $\boxed{\beta \in E}$

9°) * Montrons que $f(Y) = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}^*\}$

ona : $f(Y) = \{f(f^n(0)) / n \in \mathbb{N}\} = \{f^{n+1}(0) / n \in \mathbb{N}\} = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}^*\}$

d'où $\boxed{f(Y) = \{f^n(0) / n \in \mathbb{N}^*\}}$ ④

Scanned by CamScanner

* Mq : $\sup(Y) = \sup(f(Y))$.

→ on a $f(Y) \subset Y$ donc $\sup(f(Y)) \leq \sup(Y)$ en effet $\sup(Y)$ est majorant de Y donc $\sup(Y)$ majorant de $f(Y)$

d'où $\boxed{\sup(f(Y)) \leq \sup(Y)}$. ①

→ $Y = f(Y) \cup \{0\}$.

on a $\forall z \in f(Y)$: $z \leq \sup(f(Y))$ et $0 \leq \sup(f(Y))$

d'où $\forall z \in Y$: $z \leq \sup(f(Y))$

donc $\sup(f(Y))$ est majorant de Y .

~~d'où~~ d'où $\boxed{\sup(Y) \leq \sup(f(Y))}$ ②

C/C : de ① et ② on a : $\boxed{\sup(f(Y)) = \sup(Y)}$

10°) Montrons que $\beta = \alpha$.

on a : $\alpha \in E$ d'où $0 \leq \alpha$ donc $f^n(0) \leq f^n(\alpha) = \alpha$. $(n \in \mathbb{N})$
(car $f(\alpha) = \alpha$ et par recurrence $f^n(\alpha) = \alpha$)

d'où α est majorant de Y d'où $\boxed{\beta \leq \alpha}$

et on a : $f(\sup(Y)) = \sup(f(Y))$ (f est sup-stable)

$= \sup(Y)$

d'où $f(\beta) = \beta$ donc $\beta \in Fix(f)$

d'où $\boxed{\alpha \leq \beta}$ car $\alpha = Min(Fix(f))$

C/C : $\boxed{\alpha = \beta}$

Partie entière

Solution 1

Posons $n = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Alors $n \leq \sqrt{x} < n+1$. Donc $n^2 \leq x < (n+1)^2$. D'une part, n^2 est entier et $n^2 \leq x$ donc $n^2 \leq \lfloor x\rfloor$. D'autre part, $\lfloor x\rfloor \leq x < (n+1)^2$. Finalement $n^2 \leq \lfloor x\rfloor < (n+1)^2$ puis, par stricte croissance de la racine carrée, $n \leq \sqrt{\lfloor x\rfloor} < n+1$. Comme n est un entier, ceci signifie que $\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = n = \left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor$.

Solution 2

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(n+(n+1))}$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$$

Par croissance de la partie entière

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor \leq \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Posons alors $p = \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$. Alors

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < p+1$$

Les deux termes étant positifs, on obtient par passage au carré

$$2n+1+2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2$$

ou encore

$$2\sqrt{n^2+n} < (p+1)^2-(2n+1)$$

A nouveau par passage au carré

$$4n^2+4n < \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

Les deux membres étant entiers, on peut alors affirmer que

$$4n^2+4n+1 \leq \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2 \leq \left((p+1)^2-(2n+1)\right)^2$$

On remarque alors que $2n+1$ et $(p+1)^2-(2n+1)$ sont positifs (en effet, $(p+1)^2-(2n+1) > 2\sqrt{n^2+n} \geq 0$) donc

$$2n+1 \leq (p+1)^2-(2n+1)$$

ou encore

$$4n+2 \leq (p+1)^2$$

Or un carré d'entier ne peut être congru à 2 modulo 4 donc

$$4n+2 < (p+1)^2$$

puis

$$\sqrt{4n+2} < p+1$$

Puisque $p+1$ est entier,

$$\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor \leq p = \left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor$$

Or on a vu précédemment que

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor \leq \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Finalement,

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Solution 3

Posons, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor.$$

▶ La fonction f est $1/n$-périodique car, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x+1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor n(x+1/n) \rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx+1 \rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x+1 \rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor nx \rfloor - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

⋄ Soit alors $x \in [0, 1/n[$. On a $\lfloor nx \rfloor = 0$ et

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n-1, \ \ 0 \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$$

d'où

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n-1, \ \ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = 0,$$

et finalement $f(x) = 0$.

▶ La fonction f est $1/n$-périodique et nulle sur $[0, 1/n[$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Solution 4

Bornes supérieures et inférieures

1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et que $1 = 2 - \frac{1}{1} \in \mathcal{A}$, $1 = \min \mathcal{A}$. A fortiori, $1 = \inf \mathcal{A}$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et la suite $\left(2 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant vers 2 donc $2 = \sup \mathcal{A}$.

2. Pour tout $(m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $-1 \leq 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq 3$, $-1 = 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in \mathcal{B}$ et $3 = 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} \in \mathcal{B}$ donc $-1 = \min \mathcal{B}$ et $3 = \max \mathcal{B}$. A fortiori, $-1 = \inf \mathcal{B}$ et $3 = \sup \mathcal{B}$.

3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \neq n$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$, $0 = 1 - \frac{1}{1-0} \in \mathcal{C}$ et $2 = 1 - \frac{1}{0-1} \in \mathcal{C}$ donc $0 = \min \mathcal{C}$ et $2 = \min \mathcal{C}$. A fortiori, $0 = \inf \mathcal{C}$ et $2 = \sup \mathcal{C}$.

4. Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(p-q)^2 \geq 0$ donc $p^2+q^2 \geq 2pq$ puis $\frac{pq}{p^2+q^2} \leq \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{1}{2} = \frac{1\times 1}{1^2+1^2} \in \mathcal{D}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{D}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{D}$.
Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\frac{pq}{p^2+q^2} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{D}$.

5. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{1}{2^m+3^m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{E}$.
Posons $u_{m,n} = \frac{2^n}{2^m+3^{n+m}}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
u_{m,n+1} - u_{m,n} &= \frac{2^{n+1}}{2^m+3^{m+n+1}} - \frac{2^n}{2^m+3^{m+n}} = \frac{2^{m+n+1} + 2\cdot 3^m 6^n - 2^{m+n} - 3\cdot 3^m 6^n}{(2^m+3^{m+n})(2^m+3^{m+n+1})} \\
&= \frac{2^{m+n} - 3^m 6^n}{(2^m+3^{m+n})(2^m+3^{m+n+1})} \leq 0
\end{aligned}$$

car $6 \geq 2$ et $3 \geq 2$. La suite $(u_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{m,n} \leq u_{m,0} = \frac{1}{2^m+3^m} \leq \frac{1}{2}$ puis que $\frac{1}{2}$ est un majorant de $\mathcal{E}$. De plus, $\frac{1}{2} = \frac{2^0}{2^0+3^{0+0}} \in \mathcal{E}$ donc $\frac{1}{2} = \max \mathcal{E}$. A fortiori, $\frac{1}{2} = \sup \mathcal{E}$.

6. Pour tout $(n,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{q+1}$$

de sorte que

$$0 \leq \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \leq 3$$

La suite $\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{C}$.
La suite $\left(2 + \frac{q-1}{q+1}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant vers 3 donc $3 = \sup \mathcal{C}$.

7. Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)$, $m^2+mn+n^2 = (m-n)^2+3mn \geq 3mn$ donc $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \leq \frac{1}{3}$. De plus, $\frac{1}{3} = \frac{1\times 1}{1^2+1\times 1+1^2} \in \mathcal{G}$ donc $\frac{1}{3} = \max \mathcal{G}$. A fortiori, $\frac{1}{3} = \sup \mathcal{G}$.
Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)$, $\frac{mn}{m^2+mn+n^2} \geq 0$ et la suite $\left(\frac{n}{n^2+n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{G}$ convergeant vers 0 donc $0 = \inf \mathcal{G}$.