Devoir Surveillé N° 3

Concours Blance N°1

Suites & Fonctions Réelles

Durée : 4 heures

Documents & Calculatrices Interdits

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{n^2}{n^2+n} \leq w_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$
2. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

Exercice 2 Suite harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

2) Montrer que $(H_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que ces suites convergent vers une limite commune l.

Problème 1

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui même qui verifie :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |f(x)-f(y)|\geq |x-y|.$$

1.) Montrer que f est injective.

2.) Montrer que f est strictement monotone.

(Ind : Raisonnez par l'absurde sinon :il existent des réels x_1, x_2, x_3, x_4 tels que : $x_2>x_1$ et $x_4>x_3$ et $f(x_2)>f(x_1)$ et $f(x_4)<f(x_3)$, puis considérez l'application φ définit sur $[0,1]$ par : $\forall t\in[0,1],\quad \varphi(t)=f(x_2+t(x_4-x_2))-f(x_1+t(x_3-x_1))$.

3.) Peut-on affirmer que toute application à valeurs réelle continue et injective sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est strictement monotone ?

4.) Montrer que f est bijective.

5.) On suppose dans cette question qu'il existe un segment $[a,b]$ tel que $f([a,b])\subset[a,b]$.

5.a)Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

5.b)On supose que f est strictement croissante. Peut-on avoir $f(a)>a$? ou $f(b)<b$? ; déterminer alors la restriction de f à $[a,b]$.

5.c)On suppose que f est strictement décroissante. Déterminer sa restriction à $[a,b]$. (On pourra considérer l'application g définit par : $g(x)=a+b-f(x)$)

6.) On suppose désormais f strictment croissante et on pose $U=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)=x\}$.

6.a)Montrer que si pour tout réel x, $f(x)<x$, alors la courbe représentative de f admet quand x tend vers $+\infty$ une asymptote parallèle à la première bissectice.

6.b)Que dire de la courbe représentative de f si pour tout réel x, $f(x)>x$?

6.c)Montrer que si U est vide, alors la courbe représentative de f admet une asymptote oblique.

6.d)Montrer que si U est non vide, alors U est un intervalle.

6.e)On suppose U non vide et on considère la suite définie par la donné de son premier terme v_0 et de la relation de récurrence $v_{n+1}=f^{-1}(v_n)$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite l est un élément de U et que si cette suite n'est pas constante, alors l est une borne de U.

Problème 2

On désigne par f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante : $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad f(x+y)=f(x)f(y)$.

1.) Vérifier que la fonction f est à valeurs positives ou nulles.

2.) Montrer que si $f(0)=0$, alors la fonction f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit, on suppose que f est non identiquement nulle.

3.) Déterminer la valeur de $f(0)$.

4.) Soient x un réel positif ou nul, et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f\left(\dfrac{x}{n}\right)$ en fonction de $f(x)$ et n.

5.) Soient x un réel positif ou nul, r un nombre rationel strictement positifs.
Montrer que : $f(rx) = (f(x))^r$.

6.) Pour cette question, on suppose que f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}_+$.

6.a)Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0 telle que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n.

6.b)Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ce qui suit, on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives et qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$, tels que f soit majorée sur l'intervalle $[A, B]$.

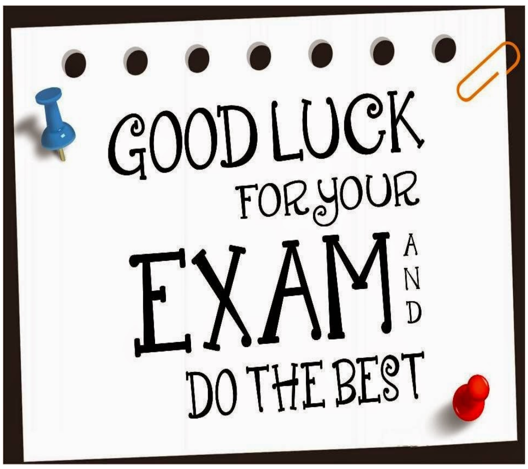
7.a)Montrer que, la fonction f est bornée sur l'intervalle $[0, B-A]$ de borne inférieure strictement positive.

7.b)Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

7.c)Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$

8.) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

FIN



Pr 2 :

1°) Soient x, y deux réels tels que : $f(x) = f(y)$

et on sait que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ donc $0 \geq |x - y|$

d'où $x = y$ par suite : $\boxed{f \text{ est injective}}$

2°) Supposons que f n'est pas strictement monotone.

donc ils existent des réels x_1, x_2, x_3, x_4 tels que

$x_2 > x_1$ et $f(x_2) \geq f(x_1)$ et $x_4 > x_3$ et $f(x_4) \leq f(x)$

soit $\varphi : t \longmapsto \varphi(t) = f(x_2 + t(x_4 - x_2)) - f(x_1 + t(x_3 - x_1))$ avec $t \in [0,1]$.

on a : $\varphi(0) = f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(x_4) - f(x_3) \leq 0$

et comme φ est continue sur $[0,1]$, donc d'après T.V.I

il existe $c \in [0,1]$ tq $\varphi(c) = 0$.

$$\varphi(c) = 0 \iff f(x_2 + c(x_4 - x_2)) = f(x_1 + c(x_3 - x_1))$$

$$\Rightarrow x_2 + c(x_4 - x_2) = x_1 + c(x_3 - x_1) \quad (f \text{ est injective})$$

$$\Rightarrow (1-c)(x_2 - x_1) = c(x_3 - x_4)$$

or $0 \leq (1-c)(x_2 - x_1) = c(x_3 - x_4) \leq 0$

donc $(1-c)(x_2 - x_1) = c(x_3 - x_4) = 0$ et comme $0 \neq x_3 - x_4$ et $x_1 - x_2 \neq 0$ donc $\overset{1-c=0=c}{\vee}$ absurde.

par suite $\boxed{f \text{ est strictement monotone sur } \mathbb{R}}$.

3°) on peut affirmer que toute app à valeurs ds $\mathbb{R}$ continue et injective sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est st monotone et la preuve est dans la question 2°).

4°) on a : f est continue et st monotone sur $\mathbb{R}$, donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ et comme $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$

si f est st croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x > 0$: $f(x) - f(0) \geq x$

et donc $\forall x > 0$: $f(x) \geq x + f(0) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\forall x < 0$: $f(0) - f(x) \geq -x \Rightarrow f(0) + x \geq f(x)$ or $\lim_{x \to -\infty} f(0) + x = -\infty$

d'où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. d'où $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

si f est st décroissante alors $-f$ est continue et vérifie :
$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ donc $(-f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ d'où $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Cl : $\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ ds } \mathbb{R}}$.

5.a) on considère l'app g définie par $\forall x \in [a,b] : g(x) = f(x) - x$.
ona : g est cont sur $[a,b]$ et $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a,b]$
et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a,b]$ (puisque $f([a,b]) \subset [a,b]$).
et d'aprés T.V.I alors $\exists c \in [a,b] : g(c) = 0$
d'où $\boxed{\exists c \in [a,b] : f(c) = c}$

5.b) * on ne peut pas avoir $f(a) > a$ en effet :
one : $c \geq a$ donc $f(c) - f(a) \geq c - a$ (f est st croissante)
d'où $c - f(a) \geq c - a$ d'où $\boxed{f(a) \leq a}$
d'où $\boxed{f(a) = a}$
* on ne peut pas avoir $f(b) < b$ en effet :
ona : $c \leq b$ donc $f(b) - f(c) \geq b - c$ d'où $f(b) - c \geq b - c$
d'où $\boxed{f(b) \geq b}$. d'où $\boxed{f(b) = b}$

* ona : $f(a) = a$ et $\forall x \in [a,b] : \; f(x) - f(a) \geq x - a \Rightarrow \boxed{f(x) \geq x}$.
et $f(b) = b$ et $\forall x \in [a,b] : \; f(b) - f(x) \geq b - x \Rightarrow \boxed{f(x) \leq x}$.
Conclusion $\forall x \in [a,b] : \; f(x) = x$ donc $\boxed{f/_{[a,b]} = Id_{[a,b]}}$

5.c) soit g l'app définie par : $g(x) = a + b - f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$
soient $x, y \in \mathbb{R}$: $|g(x) - g(y)| = |f(y) - f(x)| \geq |y - x|$ (I)
donc g est continue et vérifie (I) et one :
$\forall x \in [a,b] :$ $a \leq f(x) \leq b$ donc $-b \leq -f(x) \leq -a$ d'où $a \leq a + b - f(x) \leq b$
d'où $\forall x \in [a,b] :$ $g(x) \in [a,b]$ donc $g([a,b]) \subset [a,b]$
et one : g est st croissante sur $[a,b]$ car f est st décroissante sur $[a,b]$.
donc $g/_{[a,b]} = Id_{[a,b]}$ d'où $\boxed{\forall x \in [a,b] : \; f(x) = a + b - x}$

6.a) supposons que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < x$.

posons $h(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ on a : $h(x) - h(y) = f(x) - f(y) + (y - x)$

car d'après (I) : $|f(y) - f(x)| \geq |y - x|$. $\quad = (y-x) - (f(y) - f(x)) \leq 0$

d'où h est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} :$ $h(x) = f(x) - x < 0$

donc h est majorée sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l \in \mathbb{R}$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + l) = 0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote parallèle à la $1^{ère}$ bissectrice.

6.b) on a : h est croissante sur $\mathbb{R}$ minorée par 0 $\quad (\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = f(x) - x > 0)$.

donc $\exists l' \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = l'$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x + l') = 0$.

donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote parallèle à la $1^{ère}$ bissectrice.

6.c) supposons que $U = \phi$ donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq x$.

d'où $x \mapsto h(x)$ ne s'annule pas et puisque h est continue alors h garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ car sinon $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ et $h(a) h(b) \leq 0$ donc d'après T.V.I puisque h est cont sur $\mathbb{R}$ $\exists \alpha \in [a, b] : h(\alpha) = 0$ absurde d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) < 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < x$ ou $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > x$

donc le deux cas $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote Oblique ($//$ à $1^{ère}$ bis) d'après 6.a) et 6.b)

6.d) supposons que $U \neq \phi$ alors $\exists a \in \mathbb{R} : a \in U$

* si $U = \{a\} = [a, a]$ (c'est un intervalle)
* si $U \neq \{a\}$ alors $\exists b \in \mathbb{R} :$ $b \in U$ et $b \neq a$.

on suppose (par exemple) que $a < b$.

donc $f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [a, b] \subset [a, b]$

donc d'après 5.b on a : $f/_{[a,b]} = Id_{[a,b]}$ d'où $[a, b] \subset U$

donc $\boxed{U \text{ est un intervalle}}$.

6.e) * Montrons que (v_n) est monotone.

1er cas : Si $v_0 \leq v_1$. montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq v_{n+1}$

Pour $n=0$ on a $v_0 \leq v_1$ donc la propriété est vérifiée.

supposons que $v_n \leq v_{n+1}$ pour un certain n et montrons que $v_{n+1} \leq v_{n+2}$

on a f est st croissante sur $\mathbb{R}$ donc f^{-1} est st croissante sur $\mathbb{R}$

donc $v_n \leq v_{n+1} \Rightarrow f^{-1}(v_n) \leq f^{-1}(v_{n+1})$ d'où $v_{n+1} \leq v_{n+2}$

d'où la propriété est vraie pour $n+1$ d'où (v_n) est croissante.

2ème cas : Si $v_1 \leq v_0$ on montre de même que $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} \leq v_n$

donc (v_n) est décroissante

C/c : (v_n) est monotone.

* on a : $U \neq \phi$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in U$. posons $u_n = |v_n - \alpha|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: on a $|f(v_{n+1}) - f(\alpha)| \geq |v_{n+1} - \alpha|$

d'où $|v_n - \alpha| \geq |v_{n+1} - \alpha|$.

d'où (u_n) est décroissante d'où $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_0$

d'où $|v_n - \alpha| \leq |v_0 - \alpha|$

d'où $\alpha - |v_0 - \alpha| \leq v_n \leq \alpha + |v_0 - \alpha|$

par suite (v_n) est bornée. donc $\boxed{(v_n) \text{ est convergente}}$

* Soit $l \in \mathbb{R}$ tq : $\lim (v_n) = l$ et comme f est continue en $f(l)$

donc f^{-1} est continue en l d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(v_n) = f^{-1}(l)$

or $f^{-1}(v_n) = v_{n+1} \longrightarrow l$ d'où $l = f^{-1}(l)$ donc $f(l) = l$

donc $\boxed{l \in U}$

* supposons par l'absurde que l n'est pas une borne de U

comme U est un intervalle donc $\exists r > 0 :]l-r, l+r[\subset U$.

et comme $\lim v_n = l$ donc pour $\varepsilon = r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N : v_n \in]l-r, l+r[$

donc $\forall n \geq N : v_n \in U$. soit $p = \inf\{n \in \mathbb{N} / v_n \in U\}$

supposons que $p > 0$. on a : $v_p \in U$ donc $v_p = f(v_p) = v_{p-1} \in U$ absurde

donc $p = 0$. d'où $v_0 \in U$ d'où (v_n) est constante absurde

C/c : $\boxed{l \text{ est une borne de } U}$

PROBLÈME (EQUATIONS FONCTIONNELE) : $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$.

1°) Vérifions que f est à valeurs ds $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 \geq 0$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0}$

2°) Montrons que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement 0

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x+0) = f(x)\cdot f(0) = 0$.

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = 0}$.

3°) Déterminons la valeur de $f(0)$.

Pour $x = y = 0$ on a $f(0) = f(0+0) = (f(0))^2$

donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

or f n'est pas nulle donc $f(0) \neq 0$ donc $\boxed{f(0) = 1}$

4°) Exprimons $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. montrons par recurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f(nx) = (f(x))^n$ (*).

- on a (*) est vérifiée pour $n=1$
- Supp que $f(nx) = (f(x))^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $f((n+1)x) = (f(x))^{n+1}$

on a $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)\, f(x) \overset{HR}{=} (f(x))^n f(x)$

d'où $f((n+1)x) = (f(x))^{n+1}$

Sc : (*) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

* on a $f(x) = f(n\cdot\frac{x}{n}) = (f(\frac{x}{n}))^n$

d'où $\boxed{(f(x))^{\frac{1}{n}} = f(\frac{x}{n})}$ ($f(x) \geq 0$ et $f(\frac{x}{n}) \geq 0$).

5°) Montrons que $f(rx) = (f(x))^r$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$. donc $\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $r = \frac{p}{q}$.

$f(rx) = f(p\frac{x}{q}) = (f(\frac{x}{q}))^p = ((f(x))^{\frac{1}{q}})^p = (f(x))^r$ donc $f(rx) = f(x)^r$

6.a) Construisons une suite (x_n) st positifs tq $x_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n)=0$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tq $f(a)=0$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, f(\frac{a}{2^n})=0$.

Recurrence sur n :

- Pour $n=0$ on a $f(a)=0$ (f s'annule au moins une fois, on appris a un pt où s'annule f.) donc la propriété est vraie pour $n=0$
- supp que $f(\frac{a}{2^n})=0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$

Montrons donc $f(\frac{a}{2^{n+1}})=0$.

on a $f(\frac{a}{2^n}) = f(\frac{a}{2^{n+1}} + \frac{a}{2^{n+1}}) = (f(\frac{a}{2^n}))^2$

or $f(\frac{a}{2^n}) \overset{HR}{=} 0$ donc $f(\frac{a}{2^{n+1}})=0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N} : f(\frac{a}{2^n})=0$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$. $x_n = \frac{a}{2^n}$ donc $f(x_n)=0$

et $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ ($\frac{1}{2^n} \to 0$ vu que $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

et $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n > 0$ car $a > 0$ puisque f est non identiquement nulle.

6.b) Montrons que f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $x_n \longrightarrow 0 < x$ donc

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow 0 < x_n < x$.

on a : $f(x) = f((x - x_N) + x_N) = f(x - x_N) \cdot f(x_N) = 0$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = 0}$

7.a) Montrons que f est bornée sur $[0, B \setminus A]$ et $\operatorname{Inf}_{[0, B \setminus A]} f > 0$.

on a f est majorée sur $[A, B]$ donc $\exists M > 0$ tq

$\forall y \in [A, B]$ $0 < f(y) \leq M$.

Soit $x \in [0, B \setminus A]$, on a $f(x) = f(x+A) \cdot \frac{1}{f(A)}$ or $A+x \in [A, B]$

donc $\boxed{0 < f(x) \leq \frac{M}{f(A)}}$

soit $x\in[0,B\setminus A]$ donc $B\setminus x\in[A,B]$ d'où $0<f(B-x)\leq\frac{M}{f(A)}$.

or $f(B)=f((B-x)+x)=f(B-x).f(x)<\frac{M}{f(A)}.f(x)$

donc $$\frac{f(A)f(B)}{M}\leq f(x)$$

d'où $0<\frac{f(A+B)}{M}\leq f(x)$

par suite $$\underset{x\in[0,B\setminus A]}{\operatorname{Inf}}(f(x))\geqslant\frac{f(A+B)}{M}>0.$$

d'où f est bornée sur $[0,B-A]$ et $\underset{x\in[0,B-A]}{\operatorname{Inf}}(f(x))>0$.

7.b) Montrons que la fonction f est continue en 0^+.

Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\alpha>0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$; $0<x<\alpha\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$

et d'après la question précedente one: $\exists\, m, M\in\mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x\in[0,B-A]$: $m\leq f(x)\leq M$

one $m^{\frac{1}{2^n}}\longrightarrow 1$ et $M^{\frac{1}{2^n}}\longrightarrow 1$. $\left(M^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2^n}\ln M}\longrightarrow 1\right)$.

donc $\exists N_1\in\mathbb{N}$, tq $\forall n\in\mathbb{N}$: $n\geqslant N_1\Rightarrow 1-\varepsilon<m^{\frac{1}{2^n}}<1+\varepsilon$.

et $\exists N_2\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant N_2\Rightarrow 1-\varepsilon<M^{\frac{1}{2^n}}<1+\varepsilon$

soit $N=\operatorname{Max}(N_1,N_2)$ et on prend $\alpha=\frac{B-A}{2^N}>0$

soit $x\in\mathbb{R}_+$ tq $0<x<\alpha$ donc $0<2^Nx<B-A$

d'où $$m\leq f(2^Nx)\leq M$$

donc $m\leq(f(x))^{2^N}\leq M$ donc $m^{\frac{1}{2^N}}\leq f(x)\leq M^{\frac{1}{2^N}}$

or $1-\varepsilon<m^{\frac{1}{2^N}}$ car $N>N_1$ et $M^{\frac{1}{2^N}}<1+\varepsilon$

donc $1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon$ d'où $|f(x)-1|<\varepsilon$

donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1=f(0)$ d'où:

$$\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0}$$

7.c) Montrons que f est continue à droite en tout pt de $\mathbb{R}_+$

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ on pose $h=x-a\longrightarrow0^+$ qd $x\longrightarrow a^+$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} f(a+h) = \lim_{h \to 0^+} f(a) f(h) = f(a)$$

donc f est continue en a^+

C/C : $\boxed{f \text{ est continue en tout pt de } \mathbb{R}_+ \text{ à droite}}$

8°) Montrons $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = e^{ax}$

posons $b = f(1)$ on a $b > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ posons $v_n = \dfrac{E(x 10^n)+1}{10^n} \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et on a $v_n > x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \longrightarrow x$.

et comme f est continue en x^+ et d'après le critère séquentielle de la limite on a $f(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(v_n) = \lim_{n \to +\infty} (f(1))^{v_n} \quad \text{d'après 5°)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} b^{v_n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{v_n \ln b} = e^{x \ln b} = e^{xa}$$

on prend $a = \ln b$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = e^{ax}}$