

Simulation Devoir Surveillé N°4

## Structures

Durée : 2 heures

### Dérivation dans un anneau

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau (qui n'est pas a priori supposé commutatif)

On note 0 et 1 les éléments neutres additif et multiplicatif de  $A$ .

Une application  $\delta : A \rightarrow A$  est appelée dérivation sur  $A$  si et seulement si, pour tout  $x, y \in A$  on a les relations :

$$(1) \quad \delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$$

$$(2) \quad \delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$$

*Partie I – Crochet de Lie et exemple de dérivation*

Pour  $a, b \in A$ , on pose  $[a, b] = ab - ba$ .

1. Que vaut  $[a, b]$  lorsque  $a$  et  $b$  commutent ?
2. On revient au cas général et on se donne  $a, b, c$  dans  $A$ .
  - 2.a Former une relation liant  $[a, b]$  et  $[b, a]$ .
  - 2.b Etablir que  $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ .
  - 2.c Justifier  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ .  
Cette dernière relation est connue sous le nom d'identité de Jacobi.
3. Pour  $a \in A$ , on considère  $d_a : A \rightarrow A$  l'application définie par  $d_a(x) = ax - xa$ .  
Montrer que  $d_a$  est une dérivation sur  $A$ .

*Partie II – Propriétés des dérivations*

Soit  $\delta$  une dérivation quelconque sur  $A$ .

1. En exploitant les relations (1) et (2) calculer  $\delta(0)$  et  $\delta(1)$ .
2. Soit  $x$  un élément de l'anneau  $(A, +, \times)$ .
  - 2.a Exprimer  $\delta(-x)$  en fonction de  $\delta(x)$ .
  - 2.b On suppose que  $x$  est inversible.  
Exprimer  $\delta(x^{-1})$  en fonction de  $\delta(x)$  et de  $x^{-1}$ .
3. On se donne  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - 3.a Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  une liste d'éléments de  $A$ .  
Exprimer  $\delta(x_1 x_2 \dots x_n)$  en fonction des  $x_k$  et des  $\delta(x_k)$ .
  - 3.b Soit  $x \in A$ . Exprimer  $\delta(x^n)$ .  
Que devient cette formule si  $x$  et  $\delta(x)$  commutent ?
4. Soit  $C_\delta = \{x \in A / \delta(x) = 0\}$ .
  - 4.a Montrer que  $C_\delta$  est un sous-anneau de  $(A, +, \times)$ .
  - 4.b Montrer que, si  $(A, +, \times)$  est un corps, alors  $C_\delta$  est un sous-corps de  $(A, +, \times)$ .

*Partie III – Manipulation de dérivations*

1. Dans cette question  $\delta_1, \delta_2$  désignent deux dérivations sur  $A$ .
  - 1.a Pensez-vous que l'application  $\delta_1 + \delta_2$  est une dérivation ?  
Montrer que  $[\delta_1, \delta_2]$  est une dérivation sur  $A$ .
  - 1.b Pensez-vous que l'application  $\delta_1 \circ \delta_2$  est une dérivation ?
    2. Soit  $\delta$  une dérivation sur  $A$  et  $a, b$  deux éléments de  $A$ .
      - 2.a Montrer que  $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$ .
      - 2.b Montrer que  $[d_a, d_b] = d_{[a, b]}$ .

## Correction

### Partie I

1. Si  $ab = ba$  alors  $[a, b] = 0$ .
- 2.a  $[b, a] = -[a, b]$ .
- 2.b  $[a, b + c] = a(b + c) - (b + c)a = ab - ba + ac - ca = [a, b] + [a, c]$ .
- 2.c  $[a, [b, c]] = abc - acb - bca + cba$  etc...
3. On remarque que  $d_a(x) = [a, x]$ .  
 $d_a(x + y) = [a, x + y] = [a, x] + [a, y] = d_a(x) + d_a(y)$ .  
 $d_a(xy) = axy - xya$ ,  $xd_a(y) + d_a(x)y = xay - xya + axy - xay = axy - xya$  donc  
 $d_a(xy) = xd_a(y) + d_a(x)y$ .

### Partie II

1.  $\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0)$  donc  $\delta(0) = 0$ .  
 $\delta(1) = \delta(1 \times 1) = 1 \times \delta(1) + \delta(1) \times 1 = 2\delta(1)$  donc  $\delta(1) = 0$ .
- 2.a  $\delta(0) = \delta(x) + \delta(-x)$  donc  $\delta(-x) = -\delta(x)$ .
- 2.b  $\delta(1) = x\delta(x^{-1}) + \delta(x)x^{-1}$  donc  $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1}$ .
- 3.a  $\delta(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{k=1}^n x_1 \dots x_{k-1} \delta(x_k) x_{k+1} \dots x_n$ .
- 3.b  $\delta(x^n) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} \delta(x) x^{n-k}$ .  
Si  $x$  et  $\delta(x)$  commutent :  $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$ .
- 4.a  $C_\delta$ ,  $1 \in C_\delta$ ,  $\forall x, y \in C_\delta$ ,  $\delta(x - y) = \delta(x) - \delta(y) = 0$  et  $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y = 0$  donc  $x - y, xy \in C_\delta$ .
- 4.b  $\forall x \in C_\delta \setminus \{0\}$ ,  $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1} = 0$  donc  $x^{-1} \in C_\delta$ .

### Partie III

- 1.a Oui et on le vérifie sans peine.
- 1.b Non, par exemple dans le cadre de l'anneau des fonctions d'une variable réelle dérivable, la composée de la dérivation usuelle avec elle-même donne la dérivation seconde, qui n'est pas une dérivation (problème pour la formule (2)).
- 1.c Sans peine  $[\delta_1, \delta_2](x + y) = [\delta_1, \delta_2](x) + [\delta_1, \delta_2](y)$ .  
 $[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1(\delta_2(xy)) - \delta_2(\delta_1(xy)) = \delta_1(x\delta_2(y) + \delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y) + \delta_1(x)y)$  donne après simplification de termes  $\delta_2(x)\delta_1(y), \delta_1(x)\delta_2(y)$  :  
 $[\delta_1, \delta_2](xy) = x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(\delta_2(x))y - x\delta_2(\delta_1(y)) - \delta_2(\delta_1(x))y$ .  
Or ceci correspond à  $x[\delta_1, \delta_2](y) + [\delta_1, \delta_2](x)y$  comme voulu.
- 2.a  $[\delta, d_a](x) = \delta(ax - xa) - a\delta(x) + \delta(x)a = \delta(a)x - x\delta(a)$  après simplification de termes  $a\delta(x)$  et  $\delta(x)a$ .  
Ainsi  $[\delta, d_a](x) = d_{\delta(a)}(x)$  et puisque ceci vaut pour tout  $x \in A$  :  $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$ .
- 2.b  $[d_a, d_b] = d_{d_a(b)} = d_{[a, b]}$ .