Devoir Surveillé N° 5

Fonctions Réelles
Fonctions Usuelles
Équations Différentielles

Durée : 4 heures

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1 — **EDL1** Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+\operatorname{ch}(x))\, y' - \operatorname{sh}(x)\, y = (1+\operatorname{ch}(x))\operatorname{sh}(x)$$

où I désigne un intervalle que l'on précisera.

Exercice 2 —

1/ Etablir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan\left(\operatorname{sh}(x)\right) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

2/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\arctan\left(\operatorname{sh}(x)\right)\right| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Problème 1 — **Intégrales, primitives et suites** *L'objectif de ce problème est double. Premièrement, il s'agit d'un test de vos connaissances et de vos compétences en calcul intégral, ainsi que sur les suites. En second lieu, le but est de vous convaincre (s'il en était encore besoin) qu'une "très légère" modification d'un énoncé peut le faire passer d'un exercice assez simple à une question plus technique.*

➤ Partie I - Calcul d'une primitive et résolution d'une EDL2 homogène

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t}$$

1/ Justifier brièvement que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2/ Déterminer la primitive F de f telle que : $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3/ Vérifier que F est solution de l'équation différentielle : $(E) \qquad y'' + 2y' + 2y = 0$.

4/ Déterminer toutes les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle (E).

➤ Partie II - Etude d'une suite d'intégrales

Dans cette question, on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

5/ Calculer I_n pour tout entier naturel n.

6/ Déterminer la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

➤ Partie III - Etude d'une seconde suite d'intégrales

Dans cette question, on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

7/ Calculer J_0, J_1 et J_2.

8/ Montrer que la suite (J_n) est à termes positifs ou nuls.

9/ Etudier le sens de variation de la suite (J_n).

10/ Etablir que la suite (J_n) est convergente.

11/ Par la méthode d'intégration par parties, établir que : $J_{n+2} = \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{n^2+4n+5}\,J_n$

12/ Déterminer les valeurs de J_3 et J_4.

13/ **Calcul de la limite de la suite** (J_n).

Tout au long de cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

a/ Montrer que : $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

b/ A l'aide d'un changement de variable, établir que : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

c/ Montrer que pour tout réel a dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a) + \frac{\pi}{2} - a$$

d/ Fixons à présent ε un réel strictement positif, et choisissons a un réel tel que : $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$.

Justifier que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(0 < a\sin^n(a) < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

e/ Déduire de ce qui précède la limite de (J_n).

Problème 2 — EDL3 - Généralités et étude d'un exemple

Dans ce problème, on étudie les EDL d'ordre 3 à coefficients constants. La première partie est consacrée à des propriétés générales les concernant, et constituée de questions assez proches du cours. Les deux autres parties sont consacrées à des résolutions de telles EDL3, l'une homogène (dans la partie B) et l'autre avec second membre (dans la partie C).

Enfin, dans une assez large mesure, beaucoup de questions de cet exercice sont indépendantes ; et vous pouvez admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.

➤ Partie A- Généralités sur EDL3. .

Dans cette partie, on s'intéresse à une équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont des réels, et d une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Une telle équation sera appellée *équation différentielle linéaire d'ordre 3* (et plus rapidement notée EDL3).

Par analogie avec ce que vous connaissez sur les EDL2, on appellera *équation homogène associée à (E)* l'EDL3 sans second membre :

$$(H) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

Et on appellera *équation caractéristique* associée à (H) l'équation :

$$(EC) \qquad X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

Pour achever ce préambule, un peu de vocabulaire : lorsque $P(X)$ est un polynôme de degré 3, et α un élément de $\mathbb{K}$, on dit que :

- α est *racine simple* de $P(X)$ si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$;
- α est *racine double* de $P(X)$ si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$;
- α est *racine triple* de $P(X)$ si $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$.

1/ **Structure de l'ensemble des solutions**. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{K})$ solution de l'équation différentielle (E). Soit $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Etablir que f est solution de (E) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (H).

2/ **Tentative de description de la solution générale de** (H). Soit $r_0 \in \mathbb{K}$ une racine de l'équation caractéristique.*

On pose pour tout réel x : $\quad f(x) = g(x)e^{r_0 x}$, où g désigne une fonction arbitraire de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Etablir que f est solution de (H) si et seulement si g' est solution d'une EDL2 que l'on précisera (mais que l'on ne demande pas de résoudre).

*. On peut observer, pour se rassurer quant à l'existence de α, qu'un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$ a toujours une racine dans $\mathbb{K}$, que l'on choisisse $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (nous en reparlerons cette année).

3/ **Recherche d'une solution particulière de (E), avec second membre du type "$\mathrm{e}^{\alpha x}$"**. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un nombre (réel ou complexe donc). On s'intéresse dans cette question à l'équation :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

a/ Montrer que si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution "de la forme $K\mathrm{e}^{\alpha x}$", c'est à dire plus précisément qu'il existe un scalaire K tel que la fonction f_P définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

est solution de (E).

b/ Montrer que si α est racine triple de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution "de la forme $Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$", c'est à dire plus précisément qu'il existe un scalaire K tel que la fonction f_P définie en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$$

est solution de (E).

<u>Remarque</u> : dans la suite du problème, on pourra admettre que si α est racine simple (resp. double) de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution "de la forme $Kx\mathrm{e}^{\alpha x}$" (resp. "de la forme $Kx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$").

4/ **Principe de superposition des solutions**. Démontrer l'énoncé ci-dessous :

Propriété. Soient $d_1, \dots,\ d_n$ n fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soient $f_1, \dots,\ f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que :

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = d_i$.

Alors pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\text{la fonction } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \text{ est solution de l'équation différentielle } y''' + ay'' + by' + cy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i.$$

A partir de maintenant, on fixe dans ce problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

En particulier, lorsque l'on demandera de résoudre une équation différentielle, il s'agira de trouver les solutions de cette équation différentielle à valeurs réelles.

➤ Partie B- Une EDL3 homogène

On définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\,; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$$

On note par ailleurs :

$$(H1) \qquad y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 0$$

5/ Vérifier que g_1 est solution de $(H1)$.

6/ Vérifier que g_2 est solution de $(H1)$.

On admettra par la suite que g_3 est également solution de $(H1)$.

7/ Justifier que pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

8/ Le but de la fin de cette partie est d'établir que la réciproque de l'assertion obtenue dans la question précédente est vraie, c'est à dire que toute solution de $(H1)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions g_1, g_2 et g_3.

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, solution de (H_1).

a/ On pose : $g = f'' + 2f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(H_2) \qquad y' + 2y = 0$$

b/ Donner la solution générale de l'équation différentielle (H_2) (*il n'est pas indispensable de détailler cette question*).

c/ Résoudre l'équation différentielle : $(H_3) \qquad y'' + 2y' + 5f = 0$.

d/ Soit λ un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) \qquad y'' + 2y' + 5y = \lambda \mathrm{e}^{-2x}$.

e/ Conclure, en donnant la solution générale de $(H1)$ (réponse à justifier très soigneusement).

➤ Partie C - Une EDL3 avec second membre

Dans cette partie, on note (E_2) l'équation différentielle :

$$(E_2) \qquad y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 60\mathrm{sh}(2x)$$

9/ Déterminer une solution particulière de (E_2).

10/ Déterminer la solution générale de (E_2).

CORRIGE

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^a\cos(b)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}\,b}\right)\quad\wedge\quad \mathrm{e}^a\sin(b)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}\,b}\right)$$

Exercice 1 — **EDL1** Déterminons l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle

$$(E)\qquad (1+\mathrm{ch}(x))\,y'-\mathrm{sh}(x)\,y=(1+\mathrm{ch}(x))\,\mathrm{sh}(x)$$

Posons pour tout réel x : $a(x)=1+\mathrm{ch}(x)$; $b(x)=-\mathrm{sh}(x)$ et $c(x)=(1+\mathrm{ch}(x))\,\mathrm{sh}(x)$. Les fonctions a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut donc choisir $I=\mathbb{R}$ comme intervalle de résolution.

Pour tout réel x, on a : $\dfrac{b(x)}{a(x)}=-\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$.

Une primitive de b/a sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $A : x\in\mathbb{R}\longmapsto -\ln(1+\mathrm{ch}(x))$.
On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est :

$$\boxed{\forall\,x\in\mathbb{R},\ f_H(x)=K\,(1+\mathrm{ch}(x))\text{ avec }K\in\mathbb{R}}$$

Posons pour tout réel x : $f_P(x)=K(x)\,(1+\mathrm{ch}(x))$ où K désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f'_P(x)=K'(x)(1+\mathrm{ch}(x))+K(x)\mathrm{sh}(x)$

Par suite, pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{ch}(x))\ f'_P(x)-\mathrm{sh}(x)\,f_P(x)&=K'(x)(1+\mathrm{ch}(x))^2+K(x)(1+\mathrm{ch}(x))\mathrm{sh}(x)-K(x)(1+\mathrm{ch}(x))\mathrm{sh}(x)\\&=K'(x)(1+\mathrm{ch}(x))^2.\end{aligned}$$

On en déduit que f_P est solution de (E) si et seulement si : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ K'(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$.

On peut alors choisir : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ K(x)=\ln(1+\mathrm{ch}(x))$, et conclure qu'une solution de (E) est la fonction f_P définie en posant : $\boxed{\forall\,x\in\mathbb{R},\ f_P(x)=(1+\mathrm{ch}(x))\ln(1+\mathrm{ch}(x)).}$

Finalement, la solution générale de (E) est : $\boxed{\forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)=(1+\mathrm{ch}(x))\,(K+\ln(1+\mathrm{ch}(x)))\text{ avec }K\in\mathbb{R}}$.

est dense dans $\mathbb{R}$ en prouvant que tout réel est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{M}$.

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\boxed{\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ F(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t} + C}$$

Remarque. On peut également s'en sortir par le biais d'une double intégration par parties.

Explicitement : $\displaystyle\int \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \int \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

$$\Longrightarrow \int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \int \underbrace{\cos(t)}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \left(\sin(t)\mathrm{e}^{-t} + \int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\Longrightarrow \int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t} - \int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow 2\int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\cos(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(t)\mathrm{e}^{-t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t} \text{ (à une constante près)}}$$

2/ D'après la question précédente, la primitive F de f vérifiant $F(0) = -1/2$ est donnée par :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R},\ F(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t}}$$

3/ La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel t on a :

$$F'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad F''(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right)$$

Donc pour tout réel t :

$$F''(t) + 2F'(t) + 2F(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t) - \sin(t) + 2\sin(t) - (\cos(t) + \sin(t))\right) = 0$$

Conclusion. La fonction $F : t \in \mathbb{R} \longmapsto -\dfrac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4/ L'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ est une EDL2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée $X^2 + 2X + 2 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées : $-1 \pm \mathrm{i}$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 2y' + 2y = 0$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires)}$$

➤ Partie II - Etude d'une suite d'intégrales

Dans cette question, on pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

5/ Soit n un entier naturel. On a :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-n)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-n}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-n)t}\right]_0^{\pi}\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{\mathrm{i}+n}{n^2+1}\left(-\mathrm{e}^{-n\pi}-1\right)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}+n}{n^2+1}\left(\mathrm{e}^{-n\pi}+1\right)\right) = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}}$.

6/ D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$. D'où clairement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

➤ Partie III - Etude d'une seconde suite d'intégrales

7/ On a : $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\pi}$ d'où : $\boxed{J_0 = 1-\mathrm{e}^{-\pi}}$.

Par ailleurs : $J_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[(\cos(t)+\sin(t))\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\pi}$ d'où : $\boxed{J_1 = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}}$.

Enfin : $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos(2t))\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(K_1 - H_1)$ $\qquad(\spadesuit)$

(en ayant posé : $K_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $H_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$).

On a : $K_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = J_0 = 1-\mathrm{e}^{-\pi}$ $\qquad(\heartsuit)$

Et : $H_1 = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}-1}\left[\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-1)t}\right]_0^{\pi}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{2\mathrm{i}+1}{5}\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\pi}\right)$

Soit : $H_1 = \mathrm{Re}\left(-\dfrac{2\mathrm{i}+1}{5}\left(\mathrm{e}^{-\pi}-1\right)\right)$. $\qquad$ D'où $H_1 = \dfrac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)$ $\qquad(\diamondsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et de $(\diamondsuit)$ que : $J_2 = \dfrac{1}{2}\left[1-\mathrm{e}^{-\pi}-\dfrac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)\right]$ soit $\boxed{J_2 = \dfrac{2}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$

8/ Soit n un entier naturel. Sur $[0,\pi]$, la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}$ est à valeurs positives. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ J_n \geqslant 0}$.

9/ Soit n un entier naturel. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t)\mathrm{e}^{-t} - \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\left(\sin(t)-1\right)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout réel t entre 0 et π on a :

$\sin^n(t) \geqslant 0\,;\qquad \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0\,;\qquad \sin(t) - 1 \leqslant 0$

Par suite : $\forall\, t \in [0, \pi]\,,\ \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\left(\sin(t) - 1\right) \leqslant 0$.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} - J_n \leqslant 0$. **Conclusion**. La suite (J_n) est décroissante.

10/ La suite (J_n) est décroissante (question précédente) et minorée (par 0, d'après la question 8).

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (J_n) converge donc.

11/ Soit n un entier naturel. On écrit judicieusement † :

$$J_{n+2} = \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t)\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Puis on pose pour tout réel t entre 0 et π :

$$\begin{cases} u(t) = \sin^{n+1}(t) \\ v(t) = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t} \end{cases} \quad \text{de telle sorte que :} \quad \begin{cases} u'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos(t) \\ v'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ (théorèmes généraux), on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir :

$$J_{n+2} = -\frac{1}{2}\underbrace{\left[\sin^{n+1}(t)\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{n+1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow J_{n+2} = \frac{n+1}{2}\left[\int_0^{\pi}\sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin^{n+1}(t)\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right]$$

Posons $H_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{n+1}(t)\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On a ainsi : $J_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}\left(H_n + K_n\right)\quad(\heartsuit)$.

On a : $H_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n(t)\left(1 - \sin^2(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\sin^{n+2}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = J_n - J_{n+2}\quad(\spadesuit)$.

Par ailleurs, et par le biais d'une nouvelle intégration par parties :

$$K_n = \int_0^{\pi}\underbrace{\sin^{n+1}(t)\cos(t)}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{\sin^{n+2}(t)}{n+2}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n+2}\int_0^{\pi}\sin^{n+2}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}\,J_{n+2}\quad(\clubsuit)$$

†. Même astuce de calcul que pour les intégrales de Wallis. En outre, il fallait bien que la question 1 serve à quelquechose !

On en déduit de ($\heartsuit$), ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que :

$$J_{n+2} = \frac{n+1}{2}\left[J_n - J_{n+2} + \frac{1}{n+2}\,J_{n+2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow J_{n+2} = \frac{n+1}{2}\left[J_n - \frac{n+1}{n+2}\,J_{n+2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow J_{n+2}\left(1 + \frac{(n+1)^2}{2\,(n+2)}\right) = \frac{n+1}{2}\,J_n$$

$$\Longleftrightarrow J_{n+2}\frac{n^2+4n+5}{2\,(n+2)} = \frac{n+1}{2}\,J_n$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{J_{n+2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{n^2+4n+5}\,J_n}$$

12/ D'après la question précédente et la question 7 : $J_3 = \frac{3}{5}\,J_1 = \frac{3}{5}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$. D'où : $\boxed{J_3 = \frac{3}{10}\left(1+\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$.

De même : $J_4 = \frac{12}{17}\,J_2 = \frac{12}{17} \times \frac{2}{5}\,\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)$. D'où : $\boxed{J_4 = \frac{24}{85}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$

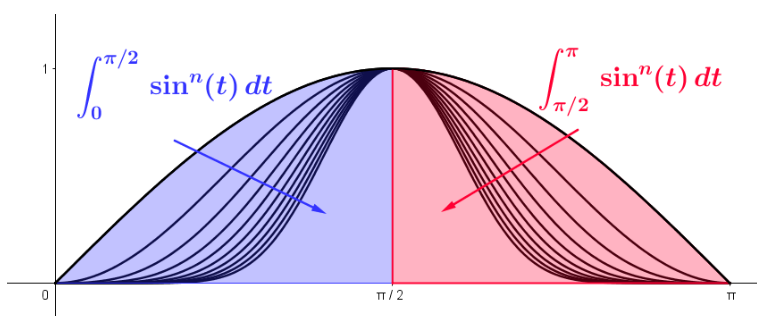
13/ a/ Soit n un entier naturel. On a : $\forall\, t \in\, [0,\pi],\;\; 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$

D'où : $\forall\, t \in\, [0,\pi],\;\; 0 \leqslant \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \sin^n(t)$ (la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ étant positive sur $[0,\pi]$).

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\boxed{\forall\, n \in\, \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^{\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t}$.

b/ Soit n un entier naturel. Dans l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$, on procède au changement de variable : $u = \pi - t$.

Lorsque t varie de 0 à $\pi/2$, u varie de π à $\pi/2$, et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$. On obtient donc :

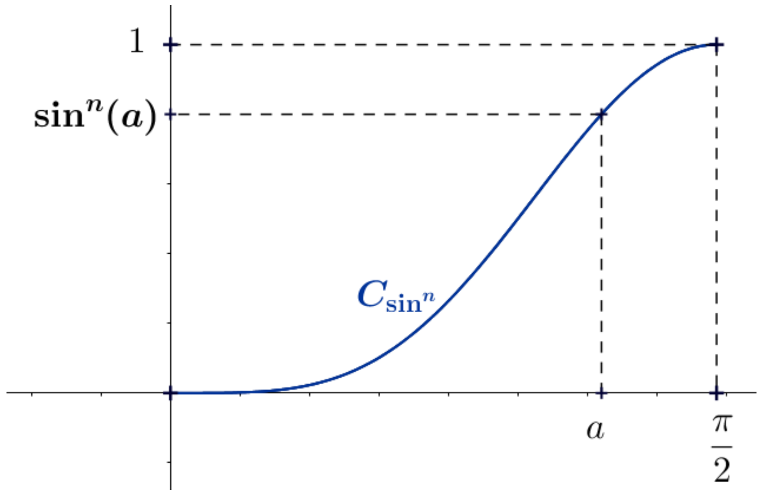


$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^n(\pi - u)\;(-\mathrm{d}u) = -\int_{\pi}^{\pi/2} \sin^n(\pi - u)\;\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(u)\;\mathrm{d}u$$

Par suite : $\boxed{\forall\, n \in\, \mathbb{N},\; \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t}$.

c/ Soit a un réel dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\spadesuit)$$



Puisque la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive et croissante sur $[0,a]$, on a :

$$\forall t \in [0,a],\ 0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant \sin^n(a)$$

D'où, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{a} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{a} \sin^n(a)\,\mathrm{d}t$$

Soit : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{a} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a) \quad (\clubsuit)$

Par ailleurs, puisque la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive et majorée par 1 sur $\left[a,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\forall t \in \left[a,\frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant 1$$

D'où, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t \quad \text{càd : } 0 \leqslant \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} - a \quad (\diamondsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\diamondsuit)$ que : $\boxed{\forall a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a) + \frac{\pi}{2} - a.}$

d/ On choisit un réel ε strictement positif[‡]

Soit a un réel tel que : $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$. Un tel réel a est strictement compris entre 0 et $\pi/2$, et il s'ensuit que : $0 < \sin(a) < 1$.

On a déjà l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a\sin^n(a) < 1 \quad (\spadesuit)$.

Par ailleurs, la suite géométrique de terme général $(a\sin^n(a))$ converge vers 0, puisque sa raison est (d'après ce qui précède) strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Par définition de limite, cela signifie que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(|a\sin^n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(0 < a\sin^n(a) < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)}$.

‡. Et "pas trop grand", disons inférieur ou égal à 1 ; l'idée étant de toute façon de le rendre arbitrairement petit.

e/ Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons un réel a tel que : $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$.

D'après la question précédente : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(0 < a \sin^n(a) < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

En outre, pour un tel réel a, on a : $0 < \dfrac{\pi}{2} - a < \dfrac{\varepsilon}{2}$

On déduit de ces deux inégalités et de la question 13-c que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon\right)$$

En résumé, on a établi que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon\right)$

Ce qui signifie exactement que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0}$.

On en déduit, d'après la question 17-b que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Pour conclure, on déduit de ce résultat, de la question 17-a et du théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0}.$$

Problème 2 — EDL3 - Généralités et étude d'un exemple

➤ Partie A - Généralités sur les EDL3.

Dans cette partie, on s'intéresse à une équation différentielle de la forme :

$$(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont des réels, et d une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Une telle équation sera appellée *équation différentielle linéaire d'ordre 3* (et plus rapidement notée EDL3).

1/ Avec les notations et sous les hypothèses de l'énoncé :

f est solution de (E)

$\Longleftrightarrow \forall\, x \in I, \qquad f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = d(x)$

$\Longleftrightarrow \forall\, x \in I, \qquad f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \varphi'''(x) + a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x)$

$\Longleftrightarrow \forall\, x \in I, \qquad f'''(x) - \varphi'''(x) + a\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) + b\left(f'(x) - \varphi'(x)\right) + c\left(f(x) - \varphi(x)\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall\, x \in I, \qquad (f-\varphi)'''(x) + a(f-\varphi)''(x) + b(f-\varphi)'(x) + c(f-\varphi)(x) = 0$ *(linéarité de la dérivation)*

$\Longleftrightarrow (f - \varphi)$ est solution de (H)

Conclusion. $[f$ est solution de $(E)] \Longleftrightarrow [(f-\varphi)$ est solution de $(H)]$.

En d'autres termes, et avec les notations précédemment introduites, toute solution f de (E) s'écrit $f_H + f_P$ où f_H (resp. f_P) désigne une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) (resp. une solution particulière de (E)).

2/ Soit $r_0 \in \mathbb{K}$ une racine de l'équation caractéristique, càd : $r_0^3 + ar_0^2 + br_0 + c = 0 \quad (\spadesuit)$.

On pose pour tout réel x : $\quad f(x) = g(x)\mathrm{e}^{r_0 x}$, où g désigne une fonction arbitraire de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, d'après les hypothèses et les théorèmes généraux. Il est donc légitime de calculer ses trois premières dérivées, ce que l'on fait avec un enthousiasme non dissimulé :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}\left(g'(x) + r_0 g(x)\right)$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}\left(g''(x) + 2r_0 g'(x) + r_0^2 g(x)\right)$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'''(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}\left(g'''(x) + 3r_0 g''(x) + 3r_0^2 g'(x) + r_0^3 g(x)\right)$

Ainsi, pour tout réel x on a :

$f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x)$

$$= \mathrm{e}^{r_0 x}\left(g'''(x) + 3r_0 g''(x) + 3r_0^2 g'(x) + r_0^3 g(x) + ag''(x) + 2ar_0 g'(x) + ar_0^2 g(x) + bg'(x) + br_0 g(x) + cg(x)\right)$$

Soit : $f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x)$

$$= \mathrm{e}^{r_0 x}\left[g'''(x) + g''(x)\left(3r_0 + a\right) + g'(x)\left(3r_0^2 + 2ar_0 + b\right) + g(x)\underbrace{\left(r_0^3 + ar_0^2 + br_0 + c\right)}_{=0 \text{ d'après } (\spadesuit)}\right]$$

Finalement, pour tout réel x, on a :

$$f'''(x) + af''(x) + bf'(x) + cf(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}\left[g'''(x) + g''(x)\left(3r_0 + a\right) + g'(x)\left(3r_0^2 + 2ar_0 + b\right)\right]$$

On déduit des calculs précédents que :

- ➟ f est solution de (E) SSI g' est solution de : $\quad y'' + \left(3r_0 + a\right)y' + \left(3r_0^2 + 2ar_0 + b\right)y = d(x)\mathrm{e}^{-r_0 x}$
- ➟ f est solution de (H) SSI g' est solution de : $\quad y'' + \left(3r_0 + a\right)y' + \left(3r_0^2 + 2ar_0 + b\right)y = 0$

3/ a/ On s'intéresse dans cette question à l'équation : $(E) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

On suppose que α n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on définit une fonction f_P en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et on a pour tout réel x :

$${f'}_P(x) = \alpha K\mathrm{e}^{\alpha x}\,; \qquad {f''}_P(x) = \alpha^2 K\mathrm{e}^{\alpha x}\,; \qquad {f'''}_P(x) = \alpha^3 K\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f'''}_P(x) + a{f''}_P(x) + b{f'}_P(x) + cf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c\right)$.

Or, α n'étant pas racine de l'équation caractéristique, on a : $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$.

On en déduit que f_P est solution de l'équation (E) si et seulement si : $K = \dfrac{1}{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}$.

Conclusion. Lorsque α n'est pas racine de l'équation caractéristique, la fonction

$$f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}\, \mathrm{e}^{\alpha\, x}$$

est (une) solution de l'EDL3 : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$.

b/ On suppose à présent que α est racine triple de l'équation caractéristique, càd :

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\,(\spadesuit)\,; \qquad 3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0\,(\heartsuit)\,; \qquad 6\alpha + 2a = 0\,(\clubsuit)$$

On définit une fonction f_P en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; f_P(x) = Kx^3\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux) et on a pour tout réel x :

$$f'_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha x^3 + 3x^2\right)\,;\; f''_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2 x^3 + 6\alpha x^2 + 6x\right)\,;\; f'''_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^3 x^3 + 9\alpha^2 x^2 + 18\alpha x + 6\right)$$

Ainsi, pour tout réel x on a :
$f'''_P(x) + af''_P(x) + bf'_P(x) + cf_P(x)$

$$= K\mathrm{e}^{\alpha\, x}\,(\alpha^3 x^3 + 9\alpha^2 x^2 + 18\alpha x + 6 + a\alpha^2 x^3 + 6a\alpha x^2 + 6ax + b\alpha x^3 + 3bx^2 + cx^3).$$

Soit encore : $f'''_P(x) + af''_P(x) + bf'_P(x) + cf_P(x)$

$$= K\mathrm{e}^{\alpha\, x}\left[x^3\left(\underbrace{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c}_{=0 \text{ d'après } (\spadesuit)}\right) + x^2\left(\underbrace{9\alpha^2 + 6a\alpha + 3b}_{=0 \text{ d'après } (\heartsuit)}\right) + x\left(\underbrace{18\alpha + 6a}_{=0 \text{ d'après } (\clubsuit)}\right) + 6\right].$$

On en déduit que f_P est solution de l'équation (E) si et seulement si : $K = \dfrac{1}{6}$.

Conclusion. Lorsque α est racine triple l'équation caractéristique, la fonction

$$f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}\, x^3\mathrm{e}^{\alpha\, x}$$

est (une) solution de l'EDL3 : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$.

4/ **Principe de superposition des solutions**.

Propriété. Soient $d_1, \ldots,\ d_n$ n fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soient $f_1, \ldots,\ f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que :
$\forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $\quad y''' + ay'' + by' + cy = d_i$.
Alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

la fonction $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de l'équation différentielle $\displaystyle y''' + ay'' + by' + cy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i$.

Prouvons la propriété. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)''' + a\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)'' + b\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)' + c\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i {f_i}''' + a\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {f_i}'' + b\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {f'}_i + c\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left({f_i}''' + a{f_i}'' + b{f_i}' + cf_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i d_i$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y''' + ay'' + by' + cy = d_i$ pour tout $i \in [\![\, 1, n \,]\!]$. Ce qui prouve le principe de superposition des solutions pour les EDL3.

➤ Partie B- Une EDL3 homogène

5/ La fonction g_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel x on a :

$${g_1}'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}\,; \qquad {g_1}''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x}\,; \qquad {g_1}'''(x) = -8\mathrm{e}^{-2x}$$

On en déduit que pour tout réel x : ${g'''}_1(x) + 4{g''}_1(x) + 9{g'}_1(x) + 10g_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(-8 + 16 - 18 + 10\right) = 0$.

Conclusion. La fonction g_1 est solution de (H_1).

6/ La fonction g_2 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et pour tout réel x on a :

${g_2}'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2\sin(2x) - \cos(2x)\right)$

${g_2}''(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2\sin(2x) + \cos(2x) - 4\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(4\sin(2x) - 3\cos(2x)\right)$

${g_2}'''(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-4\sin(2x) + 3\cos(2x) + 8\cos(2x) + 6\sin(2x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(2\sin(2x) + 11\cos(2x)\right)$

On en déduit que pour tout réel x : ${g'''}_2(x) + 4{g''}_2(x) + 9{g'}_2(x) + 10g_2(x)$

$$= \mathrm{e}^{-2x}\left(2\sin(2x) + 11\cos(2x) + 16\sin(2x) - 12\cos(2x) - 18\sin(2x) - 9\cos(2x) + 10\cos(2x)\right) = 0.$$

Conclusion. La fonction g_2 est solution de (H_1).

7/ Puisque g_1, g_2 et g_3 sont solutions de la même EDL3 $(H1)$ (qui est sans second membre), il résulte du principe de superposition (question 4) que toute combinaison linéaire de g_1, g_2 et g_3 est solution de (H_1).

Conclusion. Pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)$ est solution de $(H1)$.

8/ a/ Sous réserve que f soit une solution de $(H1)$, et en posant $g = f'' + 2f' + 5f$, on a :

$$g' + 2g = f''' + 2f'' + 5f' + 2f'' + 4f' + 10f = f''' + 4f'' + 9f' + 10f = 0$$

Conclusion. $[f$ solution de $(H1)] \Longrightarrow [(f'' + 2f' + 5f)$ solution de $y' + 2y = 0]$.

b/ La solution générale de $y' + 2y = 0$ est : $\forall\, x \in \mathbb{R},\; y(x) = K\mathrm{e}^{-2x}$ (avec $\mathbb{K}$ réel arbitraire).

c/ L'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ est une EDL2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée $X^2 + 2X + 5 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées : $-1 \pm 2\mathrm{i}$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; f(x) = \left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires)}$$

d/ Soit λ un réel arbitraire.

Puisque -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on pose : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = K\mathrm{e}^{-2x}$.

La fonction f_P est solution de $(E1)$ si et seulement si : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{-2x}\,(4-4+5) = \lambda\mathrm{e}^{-2x}$.

Par suite, la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{\lambda}{5}\,\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution de $(E1)$.

Conclusion. Les fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $y'' + 2y' + 5y = \lambda\mathrm{e}^{-2x}$ sont exactement celles définies en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\lambda}{5}\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels arbitraires)}$$

e/ Notons S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H_1), et E l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions g_1, g_2 et g_3.

Il résulte de la question précédente que $S \subset E$, et de la question 7 que $E \subset S$. Par suite $E = S$.

En d'autres termes, la solution générale de (H_1) est :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_H(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + C_3\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\ \text{(avec } C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ réels)}}$$

➤ Partie C - Une EDL3 avec second membre

Dans cette partie, on note (E_2) l'équation différentielle :

$$(E_2) \qquad y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 60\mathrm{sh}(2x)$$

9/ Notons que : $(E_2) \iff \qquad y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 30\mathrm{e}^{2x} - 30^{-2x}$

➤ Cherchons une solution particulière f_P de $(E3)$: $y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 30\mathrm{e}^{2x}$. Puisque 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut poser $f_P(x) = K\mathrm{e}^{2x}$ avec K un réel (d'après la question 3-a).

La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et on a pour tout réel x :

$$f'_P(x) = 2K\mathrm{e}^{2x}\,; \quad f''_P(x) = 4K\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et } f'''_P(x) = 8K\mathrm{e}^{2x}$$

Pour tout réel x, on a donc :

$f'''_P(x) + 4f''_P(x) + 9f'_P(x) + 10f_P(x) = K\mathrm{e}^{2x}\,(8+16+18+10) = 52K\mathrm{e}^{2x}$

Donc f_P est solution de $(E3)$ SSI : $52K = 30 \iff K = \dfrac{15}{26}$.

La fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{15}{26}\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution de $(E3)$.

➤ Cherchons une solution particulière g_P de $(E4)$: $y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 30\mathrm{e}^{-2x}$. Puisque -2 est racine simple de l'équation caractéristique, on peut poser $g_P(x) = Kx\mathrm{e}^{-2x}$ avec K un réel (d'après les commentaires suivant la question 3-b).

La fonction g_P est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux), et on a pour tout réel x :

$$g'_P(x) = K\mathrm{e}^{-2x}\,(-2x+1)\,; \quad g''_P(x)\,(4x-4) \quad \text{et } g'''_P(x) = 8K\mathrm{e}^{-2x}\,(-8x+4)$$

Pour tout réel x, on a donc :

$g'''_P(x) + 4g''_P(x) + 9g'_P(x) + 10g_P(x) = K\mathrm{e}^{-2x}\,(-8x + 4 + 16x - 16 - 18x + 9 + 10x) = -3K\mathrm{e}^{-2x}$

Donc g_P est solution de $(E4)$ SSI : $-3K = -30 \iff K = 10$.

La fonction $g_P : x \in \mathbb{R} \longmapsto 10x\,\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de $(E4)$.

On en déduit que la solution générale de $(E2)$ est :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{Ш}(x) = \frac{15}{26}\,\mathrm{e}^{2x} + 10x\mathrm{e}^{-2x} + C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + C_3\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\ \text{(avec } C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ réels)}}$$

Quelques règles de base pour gagner en efficacité

Règle 1. Quand vous utilisez une propriété, commencez par vérifier que ses hypothèses sont remplies.

Exemple dans ce DS : la formule "$K\mathrm{e}^{-A(x)}$" donnant la solution générale de $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ ne peut être appliquée qu'après avoir justifié que a, b et c sont continues et que a ne s'annule pas sur l'intervalle de résolution.

Corollaire. Apprenez précisément votre cours.

Règle 2. Portez un regard critique sur vos résultats.

Exemples dans ce DS : l'intégrale d'une fonction positive ne peut être négative. Par ailleurs, quand on vous demande de calculer une primitive F de f, et que deux questions plus loin vous avez besoin de F', il serait bon de retrouver $F' = f$.

Corollaire. Relisez-vous, au moins vos conclusions.

Règle 3. Dès que vous faites une opération, demandez-vous si et/ou justifiez que vous avez le droit de la faire.

Exemple-type : avant de calculer la dérivée (première, seconde...) d'une fonction, justifiez que cette fonction est dérivable (une fois, deux fois...). Le plus souvent, la formule "d'après les théorèmes généraux, f est..." suffit.

Au passage, évitez les énormes maladresses du style "f est dérivable et continue".

Règle 4. Dès que vous utilisez un objet mathématique, demandez-vous s'il a été défini au préalable. Si l'énoncé ne l'a pas fait pour vous, faites-le.

Exemples dans ce DS : chaque fois qu'apparaissent les variables x et n, il est indispensable de préciser que ce sont des réels, ou des entiers, ou des réels dans un intervalle fixé, ou...

Corollaire. Les quantificateurs ne sont pas accessoires.