Simulation Devoir Surveillé N° 5

Fonctions Réelles Fonctions Usuelles Équations Différentielles

I Pour démarrer

Exercice 1 (Intégrale de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer à l'aide d'un changement de variable affine que l'on a aussi $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ (cette expression n'est pas utile pour la suite).

2. *Formule explicite*

(a) Donner la valeur de W_0 et W_1.

(b) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

(c) En déduire par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

(d) Déterminer une formule similaire pour W_{2p+1}.

II Problème : approximation de π par combinaison linéaire d'arctangentes

On établit une approximation de π faisant intervenir le développement en série entière de la fonction arctan. On établira notamment une formule de type «John Machin». [1]

1 Ecriture de π comme une combinaison linéaire d'arctangentes

On désire montrer la formule suivante de type «John Machin»

$$\pi = 4\arctan\frac{1}{2} + 4\arctan\frac{1}{3}.$$

On rappelle la formule d'addition de la tangente :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

On pose $\alpha = \arctan 2 + \arctan 3$.

1. Justifier que $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

2. Calculer $\tan(\frac{3\pi}{4})$ et $\tan(\alpha)$. En déduire que $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.

3. En déduire que :

$$\pi = 4\arctan\frac{1}{2} + 4\arctan\frac{1}{3}.$$

2 Développement en série entière de arctan

Soit x un réel de $[0,1]$ et n un entier naturel. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{et} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Démontrer que que pour tout $t \in [0,x]$, on a

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

5. En déduire que $\arctan x = S_n(x) + R_n(x)$.

6. Démontrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$. En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite.

On a donc établi :

$$\forall x \in [0,1],\ \arctan x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \underbrace{=}_{\text{notation}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Cette formule constitue le *développement en série entière* de la fonction arctan.

1. John Machin (1680-1752) mathématicien anglais calcula «à la main» 100 décimales de π en 1706 à l'aide de la formule qui porte son nom. Les approximations de π à l'aide de formules du type «Machin» permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974 (J. Guilloud et M.Bouyer).

3 Approximation de π

7. Déduire des deux sections précédentes, quatre réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que la suite v de terme général $v_n = \lambda_1 S_n(a_1) + \lambda_2 S_n(a_2)$ converge vers π.

8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - v_n| \leq \dfrac{1}{2^{2n}}$.

En déduire un entier N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$, v_n est une valeur approchée de π à 10^{-6} près.

III Pour finir

Exercice 2 (Étude d'une fonction) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 1$ et

$$\forall x > 0, f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f(x)g(x) \ \text{ avec } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

2. Démontrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

(on pourra écrire $\ln(x+1) - \ln(x)$ à l'aide d'une intégrale). En déduire la monotonie de f.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Démontrer que $\ln(t+1)$ est équivalent à $\ln(t)$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que f est continue en 0.

5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

6. Démontrer que f admet un point fixe dans $\mathbb{R}^+$.

CORRIGE

I Pour démarrer

Exercice 1 (Intégrale de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ avec $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ montre que l'on a aussi $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$

2. *Formule explicite*

(a) On a $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

(b) ,Soit $n \geqslant 1$. On pose $u(t) = \sin^n t$ donc $u'(t) = n \sin^{n-1} t \cos t$ et $v'(t) = \sin t$ donc $v(t) = -\cos t$. Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, \mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\cos t \sin^n t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t (1 - \sin^2 t) \, \mathrm{d}t,$$

d'où $W_{n+1} = nW_{n-1} - nW_{n+1}$ ce qui donne bien

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$, démontrons la propriété demandée notée $HR(p)$ par récurrence sur p.
$\triangleright$ $HR(0)$ est vraie car $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(0)!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
$\triangleright$ Supposons que $HR(p)$ est vraie. En utilisant la relation de récurrence puis $HR(p)$, on a

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)}{(2p+2)} \frac{(2p+1)}{(2p+2)} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^2 (p+1)^2 (2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$HR(p+1)$ est donc vraie.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate montre que

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1 \\
&= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p) \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)} \\
&= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p \times \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)}{(2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2p \times 2p+1)} \\
&= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{(2^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p))^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

On vient de prouver que

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

II Problème : approximation de π par combinaison linéaire d'arctangentes

On établit une approximation de π faisant intervenir le développement en série entière de la fonction arctan. On établira notamment une formule de type «John Machin». [1]

1 Ecriture de π comme une combinaison linéaire d'arctangentes

On rappelle la formule d'addition de la tangente :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

On désire montrer que $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$. On pose $\alpha = \arctan 2 + \arctan 3$.

1. Justifier que $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Comme arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, les nombres $\arctan 2$ et $\arctan 3$ sont supérieurs à $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Donc leur somme est supérieure à $\frac{\pi}{2}$. Enfin la fonction arctan est majorée par $\frac{\pi}{2}$, donc les nombres $\arctan 2$ et $\arctan 3$ sont inférieurs à $\frac{\pi}{2}$. Donc leur somme est inférieure à π.

1. John Machin (1680-1752) mathématicien anglais calcula «à la main» 100 décimales de π en 1706 à l'aide de la formule qui porte son nom. Les approximations de π à l'aide de formules du type «Machin» permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974 (J. Guilloud et M.Bouyer).

2. Calculer $\tan(\frac{3\pi}{4})$ et $\tan(\alpha)$. En appliquant la formule d'addition de la tangente, on obtient que $\tan(\alpha) = -1 = \tan(\frac{3\pi}{4})$. Les nombres α et $\frac{3\pi}{4}$ ont donc la même tangente et sont donc égaux modulo π. Ainsi $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ à déterminer. Mais comme $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, la seule possibilité est que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

3. En déduire que :

$$\pi = 4 \arctan \frac{1}{2} + 4 \arctan \frac{1}{3}.$$

Déjà $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ensuite on utilise le fait que pour $x > 0$, on $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, donc l'égalité précédente devient

$$\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3}) = \pi$$

ce qui donne le résultat.

2 Développement en série entière de arctan

Soit x un réel de $[0, 1]$ et n un entier naturel. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{et} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t.$$

4. Démontrer que que pour tout $t \in [0, x]$, on a

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Soit $t \in [0, x]$, on reconnaît une somme géométrique de raison $-t^2 \neq 1$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

5. En déduire que $\arctan x = S_n(x) + R_n(x)$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \\
\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k} \, \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\
\arctan(x) - \arctan(0) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^x + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

6. Démontrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$. En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite.

Pour $t \in [0, x]$, on a $1+t^2 \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, puis $0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, et donc

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Ceci montre que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

On a :

$$|S_n(x) - \arctan x| = |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0.$$

On conclut donc $S_n(x) - \arctan x$ tend vers 0, et que $S_n(x)$ tend vers $\arctan x$.

On a donc établi :

$$\forall x \in [0,1],\ \arctan x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \underbrace{=}_{\text{notation}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Cette formule constitue le *développement en série entière* de la fonction arctan.

3 Approximation de π

7. Déduire des deux sections précédentes, quatre réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que la suite v de terme général $v_n = \lambda_1 S_n(a_1) + \lambda_2 S_n(a_2)$ converge vers π.

Comme

$$\pi = 4\arctan\frac{1}{2} + 4\arctan\frac{1}{3}.$$

On en déduit que la suite v de terme général $\boxed{v_n = 4S_n(\frac{1}{2}) + 4S_n(\frac{1}{3})}$ converge vers π.

8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - v_n| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\pi - v_n| &= \left|4\arctan\frac{1}{2} + 4\arctan\frac{1}{3} - \left(4S_n(\frac{1}{2}) + 4S_n(\frac{1}{3})\right)\right| \\
&= 4\left|\left(\arctan\frac{1}{2} - S_n(\frac{1}{2})\right) + \left(\arctan\frac{1}{3} - S_n(\frac{1}{3})\right)\right| \\
&= 4\left|R_n(\frac{1}{2}) + R_n(\frac{1}{3})\right| \\
&\leqslant 4\left(\left|R_n(\frac{1}{2})\right| + \left|R_n(\frac{1}{3})\right|\right) \\
&\leqslant 4\left(\frac{(\frac{1}{2})^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(\frac{1}{3})^{2n+3}}{2n+3}\right) \\
&\leqslant 4\left((\frac{1}{2})^{2n+3} + (\frac{1}{2})^{2n+3}\right) \quad \text{car } \frac{1}{2n+3} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3^{2n+3}} \leqslant \frac{1}{2^{2n+3}} \\
&= 8 \times \frac{1}{2^{2n+3}} = \frac{1}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

En déduire un entier N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$, v_n est une valeur approchée de π à 10^{-6} près.

Il suffit de trouver un entier n tel que $\frac{1}{2^{2n}} \leqslant 10^{-6}$, donc tel que $2^{2n} \geqslant 10^6$. Or on sait que $2^{10} = 1024 > 10^3$, donc $(2^{10})^2 > (10^3)^2 = 10^6$. Donc $2^{20} > 10^6$. L'entier $N_2 = 10$ convient donc.

III Pour finir

Exercice 2 (Étude d'une fonction) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 1$ et

$$\forall x > 0, f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \ f'(x) = f(x)g(x) \ \text{ avec } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) \times \left(\ln(1 + \frac{1}{x}) + x \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) \times \left(\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

2. Démontrer que

$$\forall x > 0, \ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

(on pourrra écrire $\ln(x+1) - \ln(x)$ à l'aide d'une intégrale).

On a

$$\ln(x+1) - \ln x = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Or la fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on a pour $t \in [x, x+1]$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$, d'où en intégrant

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire la monotonie de f.

On en déduit que pour $x > 0$, $g(x) \geqslant 0$ car :

$$g(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} = (\ln(x+1) - \ln x) - \frac{1}{x+1}.$$

En particulier $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante sur $]0, +\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Pour x au voisinage de ∞, $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0, donc on a $x\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x \times \frac{1}{x} = 1$. Ainsi par composée de limites, on a

$$\lim_{\infty} f = \exp(1) = \mathrm{e}.$$

4. Démontrer que $\ln(X+1)$ est équivalent à $\ln(X)$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que f est continue en 0.

Soit X au voisinage de $+\infty$. Morale : « Pour X grand, le terme prépondérant de $1+X$ est X qu'on met en évidence».

On a $\ln(1+X) = \ln(X(1+\dfrac{1}{X}) = \ln X + \ln(1+\dfrac{1}{X})$. Donc

$$\frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X}.$$

Or

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{\ln X} \sim \frac{1/X}{\ln X} = \frac{1}{X\ln X} \to 0.$$

Ceci montre que

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{\ln X} = 1,$$

donc pour X au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(1+X) \sim \ln X$.

Pour $x>0$ au voisinage de 0, on a $X = \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Donc d'après la question précédente,

$$x\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x\ln(\frac{1}{x}) = -x\ln x.$$

Or par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc par composée de limites,

$$\lim_{x\to 0} \exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) = \exp(0) = 1.$$

Puisque $f(0) = 1$, la limite de f en 0 vaut $f(0)$, ce qui prouve que f est continue en 0.

5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Soit $x>0$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-1}{x}.$$

On a dèjà vu à la question précédente que $h = x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(\frac{1}{x}) = -x\ln x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Or on sait que $\exp(h)-1 \underset{h\to 0}{\sim} h$. Donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x \underset{x\to 0}{\to} -\infty.$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0, sa courbe présente une tangente verticale en 0.

6. Démontrer que f admet un point fixe.

Remarquons déjà que f est majorée par le nombre e. Plusieurs preuves sont possibles :

- on peut utiliser le fait que f est croissante et que sa limite en $+\infty$ vaut e. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. On prend $x' > x$. Par croissance, $f(x) \leqslant f(x')$. D'où en faisant tendre x' vers $+\infty$, on a $f(x) \leqslant \mathrm{e}$.
- on peut aussi utiliser l'inégalité de concavité de ln : on a $\ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$, donc $x\ln(1+\frac{1}{x}) \leqslant x\frac{1}{x} = 1$ car $x \geqslant 0$. On conclut en composant par exp qui est croissante.

On pose pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) - x$. On a $g(0) = f(0) = 1 > 0$ et $g(\mathrm{e}) = f(\mathrm{e}) - \mathrm{e} \leqslant 0$ puisque f est majorée par e. La fonction continue g change de signe sur $\mathbb{R}^+$, donc elle s'annule, ce qui prouve que f admet un point fixe.