Simulation Concours Blanc N° 2

Matrices

Problème 1 — Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-3&-1&-3\\2&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad P=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

➤ Partie A - Calcul des puissances de A.

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) On pose $D=P^{-1}AP$. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).

3) Soit n un entier naturel. Exprimer D^n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n=PD^nP^{-1}$.

➤ Partie B - Etude du commutant de A.

On rappelle que pour une matrice $N\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, le commutant de N désigne l'ensemble noté $\mathrm{COM}(N)$ des matrices $Q\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N, c'est-à-dire telles que $NQ=QN$.

5) Soit $M\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence : $[M\in\mathrm{COM}(A)]\iff\left[P^{-1}MP\in\mathrm{COM}(D)\right]$

6) Déterminer $\mathrm{COM}(D)$.

7) Déduire de ce qui précède $\mathrm{COM}(A)$.

8) Etablir l'existence de trois matrices B_1, B_2 et B_3 dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telles que :

$$\forall M\in\mathrm{COM}(A),\ \exists\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3,\ M=\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3$$

➤ Partie C - Application à l'étude de trois suites imbriquées.

On définit trois suites réelles u, v et w en posant :

$$u_0=1,\ v_0=1,\ w_0=0\ \text{et :}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}u_{n+1}=-3u_n-v_n-3w_n\\v_{n+1}=2u_n+3v_n\\w_{n+1}=2u_n+v_n+2w_n\end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$.

Soit n un entier naturel quelconque.

9) Etablir une relation de récurrence entre X_{n+1} et X_n.

10) Déduire de ce qui précède une relation entre X_n et X_0.

11) Déterminer les expressions des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n.

CORRIGE

PROBLÈME 1 — Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ PARTIE A - Calcul des puissances de A.

1) Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ fixé, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitraire. Résolvons le système $PX = B$ par la méthode du pivot de Gauss.

$$[PX = B] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_2 & (L_2) \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & b_3 & (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \longleftarrow (L_1) + 2(L_2) \\ x_2 + x_3 & = & b_1 + 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_1) + 2(L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ 2x_3 & = & 2b_2 - 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_2) - (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 & = & 2b_1 + 2b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & = & b_1 + b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$ 2) Après calculs : $\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

3) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

4) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété "$A^n = PD^nP^{-1}$". L'initialisation (pour $n = 0$) est immédiate puisque $A^0 = \mathrm{I}_n$ et $PD^0P^{-1} = P\mathrm{I}_nP^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_n$. Reste à établir l'hérédité.

Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n. Alors $A^{n+1} = A^n \times A$, et en utilisant la définition de D et l'hypothèse de récurrence, on peut écrire : $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

➤ PARTIE B - Etude du commutant de A.

5) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a : $\left[P^{-1}MP \in \mathrm{COM}(D)\right] \Longleftrightarrow \left[P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\right]$

$$\Longleftrightarrow \left[P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP\right] \Longleftrightarrow \left[P^{-1}MAP = P^{-1}AMP\right] \Longleftrightarrow [MA = AM] \Longleftrightarrow [M \in \mathrm{COM}(A)]$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ [M \in \mathrm{COM}(A)] \Longleftrightarrow \left[P^{-1}MP \in \mathrm{COM}(D)\right]}$.

6) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe 9 réels $a, b, \ldots, i$ tels que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. La matrice M est dans le commutant de D si et seulement si $MD = DM$.

Or : $MD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & 2c \\ -d & e & 2f \\ -g & h & 2i \end{pmatrix}$

Et : $DM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

On déduit de ces calculs que : $[MD = DM] \iff \begin{cases} b = -b \\ 2c = -c \\ d = -d \\ 2f = f \\ 2g = -g \\ 2h = h \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

<u>Conclusion</u> : $[M \in \mathrm{COM}(D)] \iff \left[\exists\, (a,e,i) \in \mathbb{R}^3,\ M = \mathrm{diag}\,(a,e,i)\right]$. En d'autres termes, le commutant de la matrice D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_3\,(\mathbb{R})$.

7) Soit M une matrice de $\mathrm{M}_3\,(\mathbb{R})$; M est dans le commutant de A si et seulement si $P^{-1}MP$ est dans le commutant de D d'après la question 5. Donc d'après la question précédente :

$$[M \in \mathrm{COM}(A)] \iff \left[P^{-1}MP \in \mathrm{COM}(D)\right] \iff \left[\exists\, (a,e,i) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = \mathrm{diag}\,(a,e,i)\right]$$

$$\iff \left[\exists\, (a,e,i) \in \mathbb{R}^3,\ M = P\mathrm{diag}\,(a,e,i)\,P^{-1}\right]$$

Or : $P\mathrm{diag}\,(a,e,i)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 2a-e & e-i & 2a-3e+i \\ e-a & 2i-e & 3e-a-2i \\ e-a & i-e & 3e-a-i \end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u> : $\mathrm{COM}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-e & e-i & 2a-3e+i \\ e-a & 2i-e & 3e-a-2i \\ e-a & i-e & 3e-a-i \end{pmatrix} \ /\ (a,e,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

8) D'après la question précédente : $[M \in \mathrm{COM}(A)] \iff \left[\exists\, (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3,\ M = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3\right]$ en ayant posé :

$$\boxed{B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

9) D'après l'énoncé : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$.

10) Posons $\mathscr{P}(n)$: "$X_n = A^n X_0$", et montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour entier naturel n.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = \mathrm{I}_3 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A\,(A^n X_0) = (AA^n)\,X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ce qui assure que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$.

11) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, on a : $X_n = A^n X_0$. D'où grâce à la question 4 : $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. Or, d'après l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculons :

$P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où : $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où : $D^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit : $D^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$

Soit enfin : $PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$ càd : $PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2\,(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} 2\,(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n = 2\,(-1)^n - 2^n \\ v_n = (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ w_n = (-1)^{n+1} + 2^n \end{cases}}$.