Simulation DS N° 7

Algèbre linéaire

Problème : Crochet de Lie et projections vectorielle

Dans tout le problème

- n est un entier naturel non nul.
- E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
  Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on note $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.
- $\mathcal{P}_E$ désigne l'ensemble des projections vectorielles de E.

Première Partie

1. Rappeler pourquoi il est possible de définir la trace d'un endomorphisme de E.
2. Rappeler pourquoi la trace d'un projecteur est égale à son rang.
3. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = \alpha p$ avec $\alpha \neq 0$.
   Montrer que p est l'application nulle.
4. Sur $\mathcal{P}_E$, on définit la relation binaire
$$\forall p, q \in \mathcal{P}_E,\ p\mathcal{R}q \ \Leftrightarrow\ p \circ q = q \circ p = p.$$
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$.
5. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^4$.
   Notons $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et considérons p l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) Montrer que p est une projection vectorielle.
   Préciser une base ϵ' de l'image de p, et une base ϵ'' du noyau de p.
   On note alors ϵ la base de E obtenue par juxtaposition de ϵ' et de ϵ''.
   (b) Caractériser par leur matrice dans ϵ les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = 0$.
   Interpréter le résultat obtenu en termes de stabilité.
   (c) Caractériser par leur matrice dans ϵ les projecteurs de q tels que $p\mathcal{R}q$.
6. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que $[p, f] = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.
7. Soient $p, q \in \mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = 0$.
   (a) Montrer que $p \circ q, p + q - p \circ q \in \mathcal{P}_E$.
   (b) Montrer que, pour la relation $\mathcal{R}$:
   - La projection vectorielle $p \circ q$ est la borne inférieure de $\{p, q\}$.
   - La projection vectorielle $p + q - p \circ q$ est la borne supérieure de $\{p, q\}$.

Seconde Partie

Dans cette partie, on se donne $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[f, g] = \alpha f + \beta g$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f^k, g] = \alpha k f^k$.
   (b) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m \neq 0$.
   Montrer alors que la famille $(\mathrm{Id}, f, \cdots, f^m)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'endomorphisme f est nilpotent.
2. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux éléments distincts de $\mathcal{P}_E$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à 1.
   (a) Montrer que $2\alpha g \circ f + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.
   (b) En déduire $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et que $g \circ f = f$.
   (c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
   (d) Réciproquement, montrer que si p et q sont deux projections vectorielles telles que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $q \circ p = p$ alors on a l'égalité $[p, q] = q - p$.
   (e) On reprend les notations de la question I/4.
   Caractériser par leur matrice dans ϵ les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = q - p$.
3. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux élément distincts de $\mathcal{P}_E$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à -1.
   (a) Montrer que $2\alpha f \circ g + \beta(1-\alpha)g = \alpha(1+\alpha)f$.
   (b) En déduire $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et que $f \circ g = f$.
   (c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
   (d) Réciproquement, montrer que si p et q sont deux projections vectorielles telles que $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $p \circ q = p$ alors on a l'égalité $[p, q] = p - q$.
   (e) On reprend les notations de la question I/4.
   Caractériser par leur matrice dans ϵ les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = p - q$.

Corrigé

Problème : Crochet de Lie et projections vectorielle

Première Partie

1. cf cours.
2. cf cours.
3. Par hypothèse, $p \circ f - f \circ p = \alpha p$. En considérant la trace, on obtient

$$\alpha \operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(\alpha p) = \operatorname{tr}(p \circ f - f \circ p) = \operatorname{tr}(p \circ f) - \operatorname{tr}(f \circ p) = \operatorname{tr}(p \circ f) - \operatorname{tr}(p \circ f) = 0.$$

Or $\alpha \neq 0$ donc $\operatorname{tr}(p) = 0$. Ainsi $\operatorname{rg}(p) = 0$ et $\boxed{p \text{ est l'application nulle.}}$.

4. *Réflexivité.* Soit $p \in \mathcal{P}_E$. $p^2 = p$ donc $p\mathcal{R}p$.
Ainsi $\mathcal{R}$ est réflexive.
Antisymétrie. Soient $p, q \in \mathcal{P}_E$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$.
Alors $p = p \circ q = q \circ p = q$.
Ainsi $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
Transitivité. Soient $p, q, r \in \mathcal{P}_E$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$.
On a : $p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p$.
De même $r \circ p = p$. Ainsi $p\mathcal{R}r$.
$\mathcal{R}$ est donc transitive.
$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre sur } \mathcal{P}_E}$.

5. (a) $A^2 = A$ donc $p^2 = p$ et donc $\boxed{p \text{ est une projection vectorielle}}$.
$\operatorname{tr}(A) = 2 = \operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
$(2, 0, -1, 0)$ et $(1, 3, -1, 0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'image de p. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(p)$.
$\boxed{\epsilon' = ((2, 0, -1, 0), (1, 3, -1, 0)) \text{ convient}}$.
Par le théorème du rang, $\operatorname{Ker}(p)$ est de dimension $4 - 2 = 2$.
$(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires du noyau de p. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(p)$.
$\boxed{\epsilon'' = ((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}$ convient.

(b) On a : $\operatorname{Mat}_\epsilon(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\operatorname{Mat}_\epsilon(f) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$.
$[p, f] = 0$ si, et seulement si, $p \circ f - f \circ p = 0$ si, et seulement si, $p \circ f = f \circ p$ si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)$$

si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & \mathrm{O}_2 \\ \hline P & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)$$

si, et seulement si, $P = N = \mathrm{O}_2$.

$\boxed{[p, f] = 0 \text{ si, et seulement si, il existe } M, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ tels que } \operatorname{Mat}_\epsilon(f) = \left(\begin{array}{c|c} M & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & Q \end{array}\right)}$.

Ainsi, $\boxed{[p, f] = 0 \text{ si, et seulement si, } f(\operatorname{Im}(f)) \subset \operatorname{Im}(f) \text{ et } f(\operatorname{Ker}(f)) \subset \operatorname{Ker}(f)}$.

(c) On cherche les $q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $q^2 = q$, $q \circ p - p \circ q = 0$ et $p \circ q = p$.
Notons $\mathrm{Mat}_\epsilon(q) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$.
$q \circ p - p \circ q = 0$ est équivalent $N = P = \mathrm{O}_2$.
Puis, $p \circ q = p$ donne $M = I_2$.
Enfin, $q^2 = q$ donne $Q^2 = Q$.
$\boxed{p\mathcal{R}q \text{ si, et seulement si, il existe } Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ tels que } \mathrm{Mat}_\epsilon(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & Q \end{array}\right) \text{ et } Q^2 = Q}$.

6. " $\Rightarrow$ " : Par hypothèse, $p \circ f = f \circ p$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Alors $p(x) = 0$ puis $p(f(x)) = p \circ f(x) = f \circ g(x) = f(0) = 0$. Ainsi $f(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.
$\mathrm{Ker}(p)$ est stable par f.
Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Ainsi $f(y) = f(p(x)) = f \circ p(x) = p \circ f(x) = p(f(x))$. Ainsi $f(y) \in \mathrm{Im}(p)$.
$\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.
" $\Leftarrow$ " : On suppose que $f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$.
On a : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.
Soit $x \in E$. Il existe $t, z \in E$ tels que $x = p(t) + z$ avec $p(z) = 0$.
Ainsi

$$(p \circ f - f \circ p)(x) = p(f(x)) - f(p(x)) = p(f(p(t)) + f(z)) - f(p^2(t)) = p(f(p(t))) - f(p(t)).$$

Or $f(p(t)) \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $\alpha \in E$ tel que $f(p(t)) = p(\alpha)$. Ainsi $p(f(p(t))) = p^2(\alpha) = p(\alpha) = f(p(t))$.
Ainsi $(p \circ f - f \circ p)(x) = 0$.
L'application $p \circ f - f \circ p$ est nulle et donc $[p, f] = 0$.
$\boxed{[p, f] = 0 \text{ si, et seulement si, } \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \text{ sont stables par } f}$.

7. Soient $p, q \in \mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = 0$.
   (a) $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont clairement des endomorphismes de E.
   $(p \circ q)^2 = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$.
   Ainsi $\boxed{p \circ q \in \mathcal{P}_E}$.
   Comme p, q et $p \circ q$ commutent deux à deux (puisque p et q commutent) alors, par la formule du binôme de Newton,

$$(p+q-p\circ q)^2 = p^2+q^2+(p\circ q)^2+2p\circ q-2p^2\circ q-2p\circ q^2 = p+q+p\circ q+2p\circ q-2p\circ q-2p\circ q = p+q-p\circ q.$$

   Ainsi $\boxed{p + q - p \circ q \in \mathcal{P}_E}$.
   (b) ♦ On remarque que $(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ = q \circ p = p \circ q$ et que $p \circ (p \circ q) = p \circ q$. Ainsi $p \circ q \mathcal{R} p$.
   De même, $p \circ q \mathcal{R} q$.
   ♦ Soit r une projection vectorielle telle que $r\mathcal{R}p$ et $r\mathcal{R}q$.
   Cela signifie que $r \circ p = p \circ r = r$ et $r \circ q = q \circ r = r$.
   On observe que

$$(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ r = r$$

   et que

$$r \circ (p \circ q) = (r \circ p) \circ q = r \circ q = r$$

   Ainsi $r\mathcal{R}p \circ q$.
   $\boxed{\text{La projection vectorielle } p \circ q \text{ est la borne inférieure de } \{p, q\}}$.

⧫ On remarque que $(p+q-p\circ q)\circ p = p$ et que $p\circ(p+q-p\circ q) = p$. Ainsi $p\mathcal{R}p+q-p\circ q$.
De même, $q\mathcal{R}p+q-p\circ q$.
⧫ Soit r une projection vectorielle telle que $p\mathcal{R}r$ et $q\mathcal{R}r$.
Cela signifie que $p\circ r = r\circ p = p$ et $q\circ r = r\circ q = q$.
On observe que

$$(p+q-p\circ q)\circ r = p\circ r + q\circ r - (p\circ q)\circ r = p+q-p\circ(q\circ r) = p+q-p\circ q.$$

et que

$$r\circ(p+q-p\circ q) = r\circ p + r\circ q - r\circ(p\circ q) = p+q-(r\circ p)\circ q = p+q-p\circ q.$$

Ainsi $p+q-p\circ q\mathcal{R}r$.
$\boxed{\text{La projection vectorielle } p+q-p\circ q \text{ est la borne supérieure de } \{p,q\}}$.

Seconde Partie

1. (a) On montre par récurrence que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $[f^k, g] = \alpha k f^k$.
   - Pour $k=0$, $[f^k, g] = [\mathrm{Id}, g] = 0$.
   - On suppose donné $k\in\mathbb{N}$ tel que $[f^k, g] = \alpha k f^k$.
     On a :

$$\begin{aligned}[f^{k+1}, g] &= f^{k+1}\circ g - g\circ f^{k+1}\\ &= f\circ[f^k, g] + [f, g]\circ f^k\\ &= f\circ(\alpha k f^k) + \alpha f\circ f^k\\ &= \alpha k f^{k+1} + \alpha f^{k+1} = \alpha(k+1)f^{k+1}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N},\ [f^k, g] = \alpha k f^k}$.

   (b) Montrons, par récurrence sur $m\in\mathbb{N}$ que, si $f^m\neq 0$ alors la famille $(\mathrm{Id}, f, \cdots, f^m)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
   - Pour $m=0$, on a : $\lambda_0 f^0 = \lambda_0\,\mathrm{Id} = 0$. Ainsi λ_0 car Id n'est pas nulle.
   - On suppose donné $m\in\mathbb{N}^\star$ tel que la propriété soit vrai au rang $m-1$. Montrons-là au rang m.
     On a :

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j f^j = 0 \tag{$\star$}$$

     On a également

$$0 = [0, g] = [\sum_{j=0}^{m} \lambda_j f^j, g] = \sum_{j=0}^{m} j\lambda_j [f^j, g] = \alpha\sum_{j=0}^{m} j\lambda_j f^j. \tag{$\star\star$}$$

     $\frac{1}{\alpha}(\star\star) - m(\star)$ donne

$$\sum_{j=0}^{m-1} (j-m)\lambda_j f_j = 0.$$

     L'hypothèse de récurrence (applicable car $f^{m-1}\neq 0$ puisque $f^m\neq 0$) donne $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ (puisque $j-m\neq 0$ pour $0\leqslant j\leqslant m-1$).
     Puis $\lambda_m f^m = 0$. Comme $f^m\neq 0$ alors λ_0.

Récurrence achevée.
$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{Id}, f, \cdots, f^m) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E)}$.

(c) E est de dimension finie donc $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie (en l'occurrence n^2).
Par théorème fondamental, toutes les familles libres de $\mathcal{L}(E)$ contiennent moins de n^2 éléments.
D'après la question précédente (qui est une famille libre contenant $m+1$ éléments), on en déduit que $f^{n^2} = 0$.
$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est nilpotent}}$.

2. (a) Comme $[f, g] = \alpha f + \beta g$ alors $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$.
En composant la relation à gauche par g, on obtient

$$g \circ f \circ g - g \circ f = \alpha g \circ f + \beta g. \tag{$\star$}$$

En composant la relation initiale à droite par g, on obtient

$$f \circ g - g \circ f \circ g = \alpha f \circ g + \beta g. \tag{$\star\star$}$$

En effectuant $(\star)$+$(\star\star)$, on obtient

$$-(1+\alpha) g \circ f + (1-\alpha) f \circ g = 2\beta g.$$

Puis

$$-(1+\alpha) g \circ f + (1-\alpha)(\alpha f + \beta g + g \circ f) = 2\beta g.$$

Ainsi $\boxed{2\alpha g \circ f + \beta(1+\alpha) g = \alpha(1-\alpha) f}$.

(b) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Ainsi $y = \frac{2}{\alpha-1} g(f(x)) + \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} g(x) = g\left(\frac{2}{\alpha-1} f(x) + \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} x\right) \in \mathrm{Im}(g)$.
Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)}$.
Soit $x \in E$. $f(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Or g est un projecteur donc $g(f(x)) = f(x)$.
Ainsi $\boxed{g \circ f = f}$.

(c) La relation 2.(a) donne $\beta(1+\alpha) g = -\alpha(\alpha+1) f$.
Si $\alpha \neq -1$ alors $\alpha f + \beta g = 0 =$.
En composant par f à droite, on obtient $\alpha f + \beta g \circ f = 0$ et donc $\alpha f + \beta f = 0$.
Comme f est non nul alors $\alpha = -\beta$. De $\alpha f + \beta g = 0$ et de $\alpha \neq 0$, on en déduit que $f = g$.
Cela est exclus par hypothèse.
Ainsi $\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1}$.
Ainsi $[f, g] = f \circ g - f = -f + g$ et donc $f \circ g = g$.
Ainsi $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$ et, par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)}$.

(d) $[p, q] = p \circ q - q \circ p = p \circ q - p$.
Soit $x \in E$. $q(x) \in \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ donc $p(q(x)) = q(x)$. Ainsi $p \circ q = q$ puis $\boxed{[p, q] = p - q}$.

(e) On a : $\mathrm{Mat}_\epsilon(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array}\right)$. Soit $q \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\mathrm{Mat}_\epsilon(q) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$.
$[p, q] = q - p$ si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array}\right)$$

si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} O_2 & N \\ \hline -P & O_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M - I_2 & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$$

si, et seulement si, $M = I_2$ et $Q = P = \mathrm{O}_2$.

$$\boxed{q \in \mathcal{P}_E \text{ vérifie } [p,q] = q - p \text{ si, et seulement si, il existe } N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ tels que } \mathrm{Mat}_\epsilon(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & N \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)}.$$

3. (a) En 2.(a), on a trouvé que $2\alpha g \circ f + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.
Ainsi $\boxed{2\alpha f \circ g + \beta(1-\alpha)g = \alpha(1+\alpha)f}$.

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. On a alors $\alpha(1+\alpha)f(x) = 0$.
Comme $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ alors $f(x) = 0$ puis $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)}$
Soit $x \in E$. $g(g(x) - x) = g^2(x) - g(x) = 0$ car g est une projection vectorielle.
Ainsi $g(x) - x \in \mathrm{Ker}(g)$ puis $g(x) - x \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(g(x)) = f(x)$.
On a a bien $\boxed{f \circ g = f}$.

(c) La relation trouvée en 3.(a) donne $\beta(1-\alpha)g = \alpha(-1+\alpha)f$.
Si $\alpha \neq 1$ alors $\alpha f + \beta g = 0$.
En composant par g à droite, on obtient $\alpha f \circ g + \beta g = 0$ et donc $\alpha f + \beta f = 0$.
Comme f est non nul alors $\alpha = -\beta$. De $\alpha f + \beta g = 0$ et de $\alpha \neq 0$, on en déduit que $f = g$.
Cela est exclus par hypothèse.
Ainsi $\boxed{\alpha = 1 \text{ et } \beta = -1}$.
Ainsi $[f,g] = f - g \circ f = f - g$ et donc $g \circ f = g$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et, par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)}$.

(d) $[p,q] = p \circ q - q \circ p = p - q \circ p$.
Soit $x \in E$. $p(p(x) - x) = p^2(x) - p(x) = 0$ et donc $p(x) - x \in \mathrm{Ker}(p)$. Or $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et donc $q(p(x) - x) = 0$ puis $q(p(x)) = q(x)$.
Ainsi $q \circ p = q$ puis $\boxed{[p,q] = p - q}$.

(e) On a : $\mathrm{Mat}_\epsilon(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)$. Soit $q \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\mathrm{Mat}_\epsilon(q) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$.
$[p,q] = p - q$ si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline \mathrm{O}_2 & \mathrm{O}_2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right)$$

si, et seulement si,

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_2 & N \\ \hline -P & \mathrm{O}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 - M & -N \\ \hline -P & -Q \end{array}\right)$$

si, et seulement si, $M = I_2$ et $N = Q = \mathrm{O}_2$.

$$\boxed{q \in \mathcal{P}_E \text{ vérifie } [p,q] = q - p \text{ si, et seulement si, il existe } P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ tels que } \mathrm{Mat}_\epsilon(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \mathrm{O}_2 \\ \hline P & \mathrm{O}_2 \end{array}\right)}.$$

Fin