

Devoir Surveillé N° 7

## Algèbre linéaire

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

### Problème 1 — Polynômes de Bernstein

**Problématique.** *L'objectif de ce problème est de présenter une famille de polynômes possédant certaines propriétés particulières. Explicitement, cette approche comporte trois parties : dans la première, on commence par étudier un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ . La seconde partie est consacrée à l'étude du commutant de cet endomorphisme, et la dernière à la généralisation d'une partie résultats précédents.*

**Notations.** Ci-dessous la liste des conventions et notations utilisées tout au long du problème 1.

- $n$  désigne un entier naturel non-nul.
- On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ , et  $B_0 = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E$ .
- Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$ , on note  $R_k$  le polynôme  $R_k = X^k (1 - X)^{n-k}$  (il est clair que  $R_k \in E$ ).
- Tout polynôme  $P$  à coefficients réels pourra être identifié à la fonction polynomiale qui lui est associée.
- On définit une application  $\Phi : E \longrightarrow E$  en posant pour tout polynôme  $P \in E$  :

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) R_k$$

$$\text{soit encore : } \Phi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}$$

**Partie I — Etude d'un cas particulier ( $n = 3$ )**

Dans les parties I et II, on supposera que  $n = 3$ . Par suite, dans les parties I et II on a :

$$R_0 = (1 - X)^3; \quad R_1 = X(1 - X)^2; \quad R_2 = X^2(1 - X); \quad R_3 = X^3;$$

et

$$\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \Phi(P) = P(0)R_0 + 3P\left(\frac{1}{3}\right)R_1 + 3P\left(\frac{2}{3}\right)R_2 + P(1)R_3$$

1. Montrer que  $(R_0, R_1, R_2, R_3)$  est une famille libre de  $E$ . En déduire que c'est une base de  $E$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .
3. Vérifier que  $\Phi(1) = 1$  et  $\Phi(X) = X$ .

4. Montrer que la matrice de  $\Phi$  dans la base  $B_0$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$

5. Quel est le rang de  $A$ ?  $\Phi$  est-elle bijective?
6. Déterminer  $Q_2$  et  $Q_3$ , polynômes unitaires\* de degrés respectifs 2 et 3 tels que :

$$\Phi(Q_2) = \frac{2}{3} Q_2 \quad \text{et} \quad \Phi(Q_3) = \frac{2}{9} Q_3.$$

7. On pose  $B_1 = (1, X, Q_2, Q_3)$ . Justifier que  $B_1$  est une base de  $E$ .
8. Quelle est la matrice  $A'$  de  $\Phi$  dans la base  $B_1$ ?
9. Déterminer la matrice de passage  $K$  de  $B_0$  à  $B_1$ . Déterminer  $K^{-1}$ .
10. Exprimer  $A$  en fonction de  $A'$  et de  $K$ .

**Partie II — Etude d'un commutant ( $n = 3$ )**

$A, A'$  et  $K$  sont les matrices définies dans la partie I.

On note  $M_4(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à quatre lignes et quatre colonnes.

Enfin, on note  $F$  l'ensemble des matrices  $M$  de  $M_4(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AM = MA$ .

11. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $M_4(\mathbb{R})$ .
12. Soit  $M$  une matrice de  $M_4(\mathbb{R})$  et soit  $N = K^{-1}MK$ . Montrer que  $M$  commute avec  $A$  si et seulement si  $N$  commute avec  $A'$ .

\* Un polynôme est dit *unitaire* (ou *normalisé*) lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

13. On pose :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix}$$

Calculer  $NA'$  et  $A'N$ . Montrer que  $N$  commute avec  $A'$  si et seulement si  $\alpha_{1,3}$ ,  $\alpha_{1,4}$ ,  $\alpha_{2,3}$ ,  $\alpha_{2,4}$ ,  $\alpha_{3,1}$ ,  $\alpha_{3,2}$ ,  $\alpha_{3,4}$ ,  $\alpha_{4,1}$ ,  $\alpha_{4,2}$  et  $\alpha_{4,3}$  sont nuls.

14. En déduire la dimension de  $F' = \{N \in M_4(\mathbb{R}) \mid NA' = A'N\}$ .

15. Soit  $\Psi$  l'application définie en posant pour toute matrice  $M$  de  $M_4(\mathbb{R})$  :  $\Psi(M) = K^{-1}MK$ . Montrer que  $\Psi$  est un automorphisme de  $M_4(\mathbb{R})$ .

16. Déduire de la question précédente la dimension de  $F$ .

### Partie III — Retour au cas général ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

On revient dans cette partie au cas général où  $n$  désigne un entier naturel non nul quelconque, et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

On rappelle que pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $R_k$  désigne le polynôme  $R_k = X^k(1-X)^{n-k}$ .

On rappelle également que  $\Phi$  est l'application qui associe à tout polynôme  $P$  de  $E$  le polynôme :

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) R_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}$$

17. Soit  $j$  un élément de  $\llbracket 0; n \rrbracket$ . Etablir :  $\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j} = X^j$ .

18. En déduire que  $(R_0, R_1, \dots, R_n)$  est une famille génératrice de  $E$ , puis que c'est une base de  $E$ .

19. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

20. Soit  $P$  appartenant à  $E$  tel que  $\Phi(P) = 0$ . Justifier que pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\frac{k}{n}$  est racine de  $P$ .  
Qu'en déduit-on pour le polynôme  $P$  ?

21. Etablir alors que  $\Phi$  est un automorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

Un problème: introduction à la notion de sous-espace stable

Les sections 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ , on définit  $P(u)$  un endomorphisme de  $E$  par :

$$P(u) = a_0\text{id}_E + a_1u + \dots + a_nu^n.$$

On admet que si  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u) \quad \text{et} \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

## 1 Étude de quelques exemples

1. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $f(x, y) = (x + 2y, y)$ . On note  $(i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer que la droite  $\text{Vect}\{i\}$  est stable par  $f$ . Et la droite  $\text{Vect}\{j\}$  ?
2. Démontrer que si  $u$  un endomorphisme de  $E$ , alors  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont stables par  $u$ .
3. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

et  $s : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  l'application définie par  $s(X) = AX$ . Démontrer que  $s$  est une symétrie vectorielle, puis déterminer une base de ses deux espaces caractéristiques. Sont-ils stables par  $s$  ?

4. Donner sans calcul mais par des arguments géométriques, un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'est pas une homothétie qui admet au moins deux droites distinctes stables, puis un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet pas de droite stable.
5. Démontrer qu'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui admet au moins trois droites distinctes stables est une homothétie (pour faciliter la preuve, on pourra supposer que les trois droites en questions sont dirigées respectivement par les vecteurs  $i, j$  et  $i + j$ ).
6. Un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui laisse stable 4 droites distinctes est-il une homothétie ?

## 2 Existence d'un polynôme annulateur

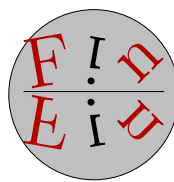
Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

7. Justifier que la famille  $(I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}, A^n)$  est liée. En déduire que  $A$  admet un polynôme annulateur non nul.
8. En déduire que si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ .
9. En déduire que si  $A$  est inversible et triangulaire supérieure, alors  $A^{-1}$  est encore triangulaire supérieure.

### 3 Existence d'une droite ou d'un plan stable

On considère  $u$  un endomorphisme de  $E$  avec  $\dim E = n$ . On admet<sup>1</sup> que  $u$  admet un polynôme annulateur non nul, c'est-à-dire qu'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul tel que  $P(u) = 0$ .

10. On suppose qu'il existe un vecteur  $x \in E$  non nul et des réels  $b$  ou  $c$  non nuls tels que  $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$ . Démontrer que  $u$  admet une droite ou un plan stable.
11. On suppose de plus pour cette question que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Démontrer qu'il existe un polynôme  $A \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg A \leq 2$  tel que l'endomorphisme  $A(u)$  est non bijectif. En déduire que  $u$  admet une droite ou un plan stable.



---

1. En fixant une base de  $E$ , on peut associer à  $u$  une unique matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , qui vérifie  $P(M) = 0$  pour un certain polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul, on a alors aussi  $P(u) = 0$ .

# CORRIGE

## Problème 1

### Partie I

1. Soit  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $\sum_{k=0}^3 \alpha_k R_k = 0$ . L'évaluation en 0 (*resp.* en 1) du terme de gauche donne  $\alpha_0 = 0$  (*resp.*  $\alpha_3 = 0$ ). De plus :

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 = 0 \iff \alpha_1 X(1-X)^2 + \alpha_2 X^2(1-X) = 0 \iff \alpha_1 X + (\alpha_2 - 2\alpha_1) X^2 + (\alpha_1 - \alpha_2) X^3 = 0$$

On déduit aisément de cette dernière identité  $\alpha_1 = 0$ , puis  $\alpha_2 = 0$ . En conclusion :  $\sum_{k=0}^3 \alpha_k R_k = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket, \alpha_k = 0$ , ce qui prouve que la famille  $(R_0, R_1, R_2, R_3)$  est libre. Comme en outre son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}_3[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

2. Dans le cas général\* : on peut commencer par observer que pour tout  $P$  dans  $E$ ,  $\Phi(P)$  est une combinaison linéaire des polynômes  $R_k$  (qui sont clairement tous de degré  $n$ ). Par suite,  $\Phi(P)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ . En résumé :  $\forall P \in E, \Phi(P) \in E$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (P, Q) \in E^2, \Phi(\lambda P + \mu Q) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\lambda P + \mu Q] \binom{k}{n} R_k \\ &= \left( \lambda \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P \binom{k}{n} R_k \right) + \left( \mu \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q \binom{k}{n} R_k \right) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q) \end{aligned}$$

Ce qui établit la linéarité de  $\Phi$ . Ainsi,  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

3. Par définition de l'application  $\Phi$  on a :

$$\Phi(1) = R_0 + 3R_1 + 3R_2 + R_3 \iff \Phi(1) = (1-X)^3 + 3X(1-X)^2 + 3X^2(1-X) + X^3 \iff \Phi(1) = [X + (1-X)]^3$$

la dernière égalité provenant de la formule du binôme de Newton<sup>†</sup>. On en déduit finalement :  $\Phi(1) = 1$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} \Phi(X) = R_1 + 2R_2 + R_3 &\iff \Phi(X) = X(1-X)^2 + 2X^2(1-X) + X^3 \\ &\iff \Phi(X) = X^3 - 2X^2 + X + 2X^2 - 2X^3 + X^3 \iff \Phi(X) = X. \end{aligned}$$

4. Il reste à calculer les images par  $\Phi$  de  $X^2$  et de  $X^3$  pour obtenir la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . En premier lieu :

$$\begin{aligned} \Phi(X^2) = \frac{1}{3}R_1 + \frac{4}{3}R_2 + R_3 &\iff \Phi(X^2) = \frac{1}{3}X(1-X)^2 + \frac{4}{3}X^2(1-X) + X^3 \\ &\iff \Phi(X^2) = \frac{X^3 - 2X^2 + X}{3} + \frac{4X^2 - 4X^3}{3} + X^3 \iff \Phi(X^2) = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X^2. \end{aligned}$$

\*. Où  $n$  est un entier naturel non nul arbitraire.

†. Présentement appliquée dans l'anneau  $\mathbb{R}[X]$ .

En second lieu :

$$\begin{aligned} \Phi(X^3) &= \frac{1}{9}R_1 + \frac{8}{9}R_2 + R_3 \iff \Phi(X^3) = \frac{1}{9}X(1-X)^2 + \frac{8}{9}X^2(1-X) + X^3 \\ &\iff \Phi(X^3) = \frac{X^3 - 2X^2 + X}{9} + \frac{8X^2 - 8X^3}{9} + X^3 \iff \Phi(X^3) = \frac{1}{9}X + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{9}X^3. \end{aligned}$$

De ces calculs et de la question précédente, on déduit que la matrice de  $\Phi$  dans la base  $B_0$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice  $A$  est de rang 4, puisqu'elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, ou encore car son déterminant (égal à  $4/27$ ) est non nul. Par conséquent, elle est inversible, et  $\Phi$  est bijective ‡.

6. On cherche un polynôme  $Q_2$ , unitaire et de degré 2, donc de la forme  $Q_2 = X^2 + aX + b$  (avec  $a$  et  $b$  réels), tel que  $(\Phi - \frac{2}{3}\text{id}_{\mathbb{R}_3[X]})(Q_2) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ . Cette équation peut se réécrire matriciellement :

$$\left(A - \frac{2}{3}I_4\right) \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

D'où :  $Q_2 = X^2 - X$ . On procède de manière analogue pour déterminer  $Q_3$ , unitaire et de degré 3, donc de la forme  $Q_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$  (avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels), tel que  $(\Phi - \frac{2}{9}\text{id}_{\mathbb{R}_3[X]})(Q_3) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ . Cette équation peut se réécrire matriciellement :

$$\left(A - \frac{2}{9}I_4\right) \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 7/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/9 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 4/9 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 1/2 \\ a = -3/2 \end{cases}$$

D'où :  $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ .

7. La famille  $B_1 = (1, X, Q_2, Q_3)$  est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée). Son cardinal étant égal à la dimension de  $\mathbb{R}_3[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

8. Au vu des questions 3 et 6, la matrice  $A'$  de  $\Phi$  dans la base  $B_1$  est :  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$ . §

9. D'après les expressions de  $Q_2$  et  $Q_3$  obtenues dans la question 6, la matrice de passage de la base canonique  $B_0$  à la

base  $B_1$  est :  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme toute matrice de passage,  $K$  est inversible, et  $K^{-1}$  peut être obtenue

(par exemple) en résolvant le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = X \\ y - z + (1/2)t = Y \\ z - (3/2)t = Z \\ t = T \end{cases} \iff \begin{cases} x = X \\ y = Y + Z + T \\ z = Z + (3/2)T \\ t = T \end{cases}$$

‡. Et la réciproque  $\Phi^{-1}$  a pour matrice  $A^{-1}$  dans la base  $B_0$ .

§. *A posteriori*, on peut observer que le but de la question 6 était de diagonaliser la matrice de  $\Phi$ , en recherchant des vecteurs propres ( $Q_2$  et  $Q_3$ ) respectivement pour les valeurs propres  $2/3$  et  $2/9$ .

On en déduit que : 
$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. D'après la formule du changement de base, on a :  $A' = K^{-1}AK$ , soit :  $A = KA'K^{-1}$ .

## Partie II

11. L'application  $\varphi : M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mapsto (AM - MA) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  est clairement linéaire. Comme  $F$  est le noyau de  $\varphi$ ,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

12. Soit  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , on a :  $MA = AM \iff MKA'K^{-1} = KA'K^{-1}M \iff K^{-1}MKA'K^{-1} = \underbrace{K^{-1}K}_{I_4}A'K^{-1}M$

$$\iff K^{-1}MKA' \underbrace{K^{-1}K}_{I_4} = A'K^{-1}MK \iff K^{-1}MKA' = A'K^{-1}MK \iff NA' = A'N$$

**Conclusion** :  $M$  commute avec  $A$  si et seulement si  $N$  commute avec  $A'$ .

13. Avec les notations de l'énoncé, on a d'une part :

$$NA' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \iff NA' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & 2\alpha_{1,3}/3 & 2\alpha_{1,4}/9 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 2\alpha_{2,3}/3 & 2\alpha_{2,4}/9 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 2\alpha_{3,3}/3 & 2\alpha_{3,4}/9 \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & 2\alpha_{4,3}/3 & 2\alpha_{4,4}/9 \end{pmatrix} \quad (\spadesuit)$$

et d'autre part :

$$A'N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \iff A'N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ 2\alpha_{3,1}/3 & 2\alpha_{3,2}/3 & 2\alpha_{3,3}/3 & 2\alpha_{3,4}/3 \\ 2\alpha_{4,1}/9 & 2\alpha_{4,2}/9 & 2\alpha_{4,3}/9 & 2\alpha_{4,4}/9 \end{pmatrix} \quad (\clubsuit)$$

La matrice  $N$  commute avec  $A'$  si et seulement si  $NA' - A'N = 0$ , c'est-à-dire d'après  $(\spadesuit)$  et  $(\clubsuit)$  si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{1,3}/3 & -7\alpha_{1,4}/9 \\ 0 & 0 & -\alpha_{2,3}/3 & -7\alpha_{2,4}/9 \\ \alpha_{3,1}/3 & \alpha_{3,2}/3 & 0 & -4\alpha_{3,4}/9 \\ 7\alpha_{4,1}/9 & 7\alpha_{4,2}/9 & 4\alpha_{4,3}/9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Conclusion** :  $N$  commute avec  $A'$  si et seulement si  $\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$  et  $\alpha_{4,3}$  sont nuls.

14. Soit  $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . D'après la question précédente,  $N \in F'$  si et seulement s'il existe six scalaires  $(\alpha_k)_{k \in [1;6]}$  tels que :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix} \iff N = \alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33} + \alpha_6 E_{44} \quad \heartsuit$$

On en déduit que  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$  est une famille génératrice de  $F'$ ; et comme c'est une sous-famille de la base canonique de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , elle est libre.

**Conclusion** :  $F'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  de dimension 6, une base étant  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$ .

$\heartsuit$ . En notant  $E_{ij}$  la matrice carrée de taille 4 dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne, qui vaut 1.



15. Commençons par observer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , la matrice  $K^{-1}MK$  est encore dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , ce qui assure que l'image de  $\Psi$  est contenue dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \text{En outre : } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (M, M') \in [\mathcal{M}_4(\mathbb{R})]^2, \Psi(\lambda M + \mu M') &= K^{-1}(\lambda M + \mu M')K = (\lambda K^{-1}M + \mu K^{-1}M')K \\ &= \lambda K^{-1}MK + \mu K^{-1}M'K = \lambda \Psi(M) + \mu \Psi(M') \end{aligned}$$

Ce qui prouve la linéarité de  $\Psi$ . Donc  $\Psi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

Considérons à présent l'application :  $\tilde{\Psi} : M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mapsto KMK^{-1} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . C'est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , et il est clair que  $\Psi \circ \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ . Ce qui prouve que  $\Psi$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  (et  $\Psi^{-1} = \tilde{\Psi}$ ).

16. Soit  $M \in F$ , alors  $\Psi(M) = K^{-1}MK$  et donc  $\Psi(M) \in F'$  d'après la question 12. D'où :  $\Psi(F) \subset F'$ , c'est toujours ça de pris. Conversely, soit  $N \in F'$  : alors  $N = K^{-1}(KNK^{-1})K$ , et  $(KNK^{-1}) \in F$ , toujours d'après la question 12. En posant  $M = KNK^{-1}$ , on a donc :  $N = \Psi(M)$  avec  $M \in F$ , d'où  $N \in \Psi(F)$ . Par suite :  $F' \subset \Psi(F)$ .

Des deux inclusions établies plus haut, on déduit que :  $\Psi(F) = F'$ .

De cette égalité et de la question précédente, on déduit que  $F$  et  $\Psi(F) = F'$  sont des espaces vectoriels isomorphes ; à ce titre, ils sont de même dimension. Ainsi :  $\dim F = 6$ .

### Partie III ( $n$ désigne un entier naturel non nul quelconque)

17. Soit  $j$  un élément de  $\llbracket 0; n \rrbracket$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j} &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^{k+j} (1-X)^{n-k-j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^k (1-X)^{(n-j)-k} \\ &= X^j \underbrace{[X + (1-X)]^{n-j}}_{=1} = X^j \end{aligned}$$

18. D'après la question précédente, tous les  $X^j$  (pour  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ) appartiennent à  $\text{Vect}(R_k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket)$ . On en déduit que la famille  $(R_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme elle est de cardinal  $(n+1)$  égal à la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

19. Il a été prouvé dans la question 2 que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

20. Soit  $P \in E$ . On a :

$$\Phi(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P \left( \frac{k}{n} \right) R_k = 0 \quad (\diamond)$$

Or d'après la question précédente, la famille  $(R_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une base de  $E$  ; c'est donc en particulier une famille libre de  $E$ , et l'égalité  $(\diamond)$  implique alors :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \left( \binom{n}{k} P \left( \frac{k}{n} \right) = 0 \text{ d'où } \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P \left( \frac{k}{n} \right) = 0 \right).$$

D'après ce qui précède, le polynôme  $P$  possède  $(n+1)$  racines distinctes (les réels  $k/n$  avec  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ). Comme son degré est inférieur ou égal à  $n$ , on en déduit que c'est le polynôme nul. En résumé :  $(\Phi(P) = 0) \Rightarrow (P = 0)$ .

21. D'après la question précédente,  $\Phi$  est injectif. Comme c'est un endomorphisme de  $E$  d'après la question 19, et que  $E$  est de dimension finie\*\*, on en déduit que  $\Phi$  est bijectif, donc  $\Phi$  est un automorphisme de  $E$ .

|. Puisque  $\binom{n}{k} \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .

\*\* . Il s'agissait de ne pas oublier cet argument essentiel pour conclure.

# 1 Étude de quelques exemples

1. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $f(x, y) = (x + 2y, y)$ . On note  $(i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer que la droite  $\text{Vect}\{i\}$  est stable par  $f$ . Et la droite  $\text{Vect}\{j\}$  ?

Soit  $u = (x, 0) \in \text{Vect}\{i\}$ . Alors  $f(u) = (x + 2 \times 0, 0) = u \in \text{Vect}\{i\}$ . Donc  $\text{Vect}\{i\}$  est stable par  $f$ . En revanche  $f(j) = (2, 1) \notin \text{Vect}\{j\}$ , donc  $\text{Vect}\{j\}$  n'est pas stable par  $f$ .

2. Démontrer que si  $u$  un endomorphisme de  $E$ , alors  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont stables par  $u$ .

Si  $x \in \text{Ker } u$ , alors  $u(u(x)) = u(0) = 0$ , donc  $u(x) \in \text{Ker } u$ . Enfin, si  $y \in \text{Im } u$ , on a  $u(y) \in \text{Im } u$  (ceci même si  $y$  était quelconque dans  $E$ ).

3. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

et  $s : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  l'application définie par  $s(X) = AX$ . Démontrer que  $s$  est une symétrie vectorielle, puis déterminer une base de ses deux espaces caractéristiques. Sont-ils stables par  $s$  ?

Déjà pour tout vecteur colonne  $X$  et  $Y$  et tout réel  $\lambda$ , on a  $s(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda s(X) + s(Y)$  par bilinéarité du produit matriciel.

De plus  $s^2(X) = A^2X$  et un calcul montre que  $A^2 = I_3$ . Donc  $s$  est linéaire et  $s \circ s = \text{id}$  donc  $s$  est une symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id})$ , parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id})$ .

Une résolution de système montre que  $\text{Ker}(s - \text{id})$  est la droite dirigée par  $X = (1, 1, 4)$ , tandis que  $\text{Ker}(s + \text{id})$  est le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + y + 4z = 0$ .

Remarque : le vecteur  $(1, 1, 4)$  est un vecteur normal au plan d'équation  $x + y + 4z = 0$ . La symétrie  $s$  est donc une symétrie orthogonale.

4. Donner sans calcul mais par des arguments géométriques, un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'est pas une homothétie qui admet au moins deux droites distinctes stables, puis un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet pas de droite stable.

Considérons par exemple, la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses,  $s : (x, y) \rightarrow (x, -y)$ . Elle laisse stable la droite  $\text{Vect}\{i\}$  (c'est  $\text{Ker}(s - \text{id})$  l'ensemble de ses vecteurs invariants), mais aussi la droite  $\text{Vect}\{j\}$  (c'est  $\text{Ker}(s + \text{id})$ , si  $X \in \text{Vect}\{j\}$ , alors  $s(X) = -X \in \text{Vect}\{j\}$ ).

Enfin, si l'on prend une rotation  $r$  de centre 0 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  par exemple (tout angle qui n'est pas un multiple de  $\pi$ ) convient, alors  $r$  ne fixe aucune droite.

5. Démontrer qu'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  qui admet au moins trois droites distinctes stables est une homothétie (pour faciliter la preuve, on pourra supposer que les trois droites en questions sont dirigées respectivement par les vecteurs  $i$ ,  $j$  et  $i + j$ ).

Comme  $\text{Vect}\{i\}$  est stable par  $f$ ,  $f(i) \in \text{Vect}\{i\}$ , donc il existe  $a \in \mathbb{K}$  tel que  $f(i) = ai$ .

De même,  $\text{Vect}\{j\}$  est stable par  $f$ , donc  $f(j) \in \text{Vect}\{j\}$ , donc il existe  $b \in \mathbb{K}$  tel que  $f(j) = bj$ .

On souhaite qu'il existe un scalaire  $k$  tel que pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , on ait  $f(X) = kX$ . Il nous suffit pour cela de montrer que  $a = b$ , en passant par le vecteur «pivot»  $i + j$ . En effet, comme  $\text{Vect}\{i + j\}$  est stable par  $f$ ,  $f(i + j) \in \text{Vect}\{i + j\}$ , donc il existe  $c \in \mathbb{K}$  tel que  $f(i + j) = c(i + j)$ .

Mais par linéarité, on a  $f(i + j) = f(i) + f(j)$ , donc on a :

$$ai + bj = c(i + j) = ci + cj.$$

Par unicité des coordonnées dans la base canonique  $(i, j)$ , on en déduit que  $a = c$  et  $b = c$ , d'où  $a = b$ .

Mais alors, pour tout  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$f(X) = f(xi + yj) = xf(i) + yf(j) = xai + yaj = a(xi + yj) = aX.$$

L'endomorphisme  $f$  est donc l'homothétie vectorielle de rapport  $a$ .

6. Un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui laisse stable 4 droites distinctes est-il une homothétie ?

Non pas forcément, il suffit de prendre une transformation qui n'est pas une homothétie qui laisse stable donc tout un plan de  $\mathbb{R}^3$ , donc toutes les droites de ce plan. Par exemple, la symétrie des questions ci-dessus.

## 2 Existence d'un polynôme annulateur

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

7. Justifier que la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$  est liée. En déduire que  $A$  admet un polynôme annulateur non nul.

La famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$  est une famille de  $n^2 + 1$  vecteurs de l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui est de dimension  $n^2$ . On en déduit par Steinitz, que cette famille est liée. Il existe donc des scalaires non tous nuls  $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$  tels que  $a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$ . Cela montre que la polynôme  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$  est un polynôme annulateur de  $A$  non nul.

8. En déduire que si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ .

Notons  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$  avec  $a_p \neq 0$  un polynôme annulateur de  $A$  non nul. Si  $a_0 \neq 0$ , alors on a :

$$A \times \frac{a_1A + \dots + a_pA^{p-1}}{-a_0} \implies A^{-1} = \frac{a_1A + \dots + a_pA^{p-1}}{-a_0}.$$

Ce qui montre que  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ . Et si  $a_0 = 0$ ? On multiplie l'égalité  $a_1A + \dots + a_pA^p = 0$  par  $A^{-1}$  et on a alors

$$a_1I_n + a_2A + \dots + a_pA^{p-1} = 0.$$

On est ramené à la situation précédente, en discutant selon que  $a_1$  est nul ou non... Comme  $P$  est non nul, au bout d'un moment on va tomber sur un coefficient non nul.

Remarque : pour une rédaction concise, on peut procéder ainsi en posant  $k$  le plus petit indice tel que  $a_k \neq 0$  (ça existe puisque  $P$  est non nul). Alors on a  $a_kA^k + \dots + a_pA^p = 0$ , on multiplie par  $(A^{-1})^k$ , et on a  $a_kI_n + a_{k+1}A + \dots + a_pA^{p-k} = 0$ , d'où

$$A \times \frac{a_{k+1}I_n + a_{k+2}A + \dots + a_pA^{p-k-1}}{-a_k} = I_n.$$

On a donc  $A^{-1} = \frac{a_{k+1}I_n + a_{k+2}A + \dots + a_pA^{p-k-1}}{-a_k}$  qui est un polynôme en  $A$ .

9. En déduire que si  $A$  est inversible et triangulaire supérieure, alors  $A^{-1}$  est encore triangulaire supérieure.

On a vu dans le cours de calcul matriciel qu'une combinaison linéaire et un produit de matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. On en déduit qu'un polynôme de matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Comme  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ ,  $A^{-1}$  est encore triangulaire supérieure.

### 3 Existence d'une droite ou d'un plan stable

On considère  $u$  un endomorphisme de  $E$  avec  $\dim E = n$ . On admet<sup>1</sup> que  $u$  admet un polynôme annulateur non nul, c'est-à-dire qu'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul tel que  $P(u) = 0$ .

10. On suppose qu'il existe un vecteur  $x \in E$  non nul et des réels  $b$  ou  $c$  non nuls tels que  $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$ . Démontrer que  $u$  admet une droite ou un plan stable.

On pose  $F = \text{Vect} \{x, u(x)\}$ . Comme  $x$  est non nul,  $\dim F \geq 1$  et donc  $F$  est soit une droite, soit un plan si la famille  $(x, u(x))$  est liée. L'espace  $F$  est stable par  $u$ , car si  $y \in F$ , alors  $y = sx + tu(x)$  avec  $s$  et  $t$  dans  $\mathbb{K}$ . Mais alors  $u(y) = su(x) + tu^2(x)$ . Si  $c = 0$ , alors  $ax + bu(x) = 0$  avec  $b \neq 0$  et donc  $u(x) = \frac{-a}{b}x$ , donc  $u^2(x) = \frac{-a}{b}u(x)$ , d'où  $u(y) = su(x) + \frac{-at}{b}u(x) \in F$ .

De même si  $c \neq 0$ , alors  $u^2(x) = \frac{-a}{c}x + \frac{-b}{c}u(x)$ . Donc  $u(y)$  qui vaut  $su(x) + tu^2(x)$  est une combinaison linéaire de  $x$  et de  $u(x)$ , donc dans  $F$ .

---

1. En fixant une base de  $E$ , on peut associer à  $u$  une unique matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , qui vérifie  $P(M) = 0$  pour un certain polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul, on a alors aussi  $P(u) = 0$ .

11. On suppose de plus pour cette question que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Démontrer qu'il existe un polynôme  $A \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg A \leq 2$  tel que l'endomorphisme  $A(u)$  est non bijectif. En déduire que  $u$  admet une droite ou un plan stable.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme annulateur non nul de  $u$ . On considère sa décomposition en polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , que l'on note  $P = P_1 \times \cdots \times P_k$ , avec  $P_i$  des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 1 ou de degré 2 à discriminant négatif.

On a  $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u) = 0$ , donc si tous les endomorphismes  $P_1(u), P_2(u), \dots, P_k(u)$  sont bijectifs, alors leur composée  $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u)$  serait encore bijective, ce qui est faux puisque cette composée est l'endomorphisme nul. Donc il existe un entier  $i$  tel que l'endomorphisme  $P_i(u)$  est non bijectif. Il ne peut donc pas être injectif car sinon il serait automatiquement bijectif, car c'est un endomorphisme de dimension finie (une des conséquences du théorème du rang).

Le noyau de  $P_i(u)$  est donc non réduit à 0, et il existe donc un vecteur  $x \in E$  non nul tel que  $P_i(u)(x) = 0$ .

Si  $\deg P_i = 1$ , alors  $P_i = a + bX$  et donc  $P_i(u) = a \text{id} + u$ , puis  $ax + u(x) = 0$ . En particulier la droite  $\text{Vect}\{x\}$  est stable par  $u$ .

Si  $\deg P_i = 2$ , alors  $P = aX^2 + bX + c$  et donc  $au^2(x) + bu(x) + cx = 0$ . On est donc ramené à la question précédente, et  $u$  admet une droite ou un plan stable.