Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

Devoir MAISON N3

Sommes & Produits

Exercice 4 (Une identité binomiale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\binom{2n}{k}-(-1)^{k-1}\binom{2n}{k-1}\right).$$

2. En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}.$$

Exercice 5 (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel positif ou nul. On appelle racine n-ième de x, noté $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ l'unique réel positif ou nul r tel que $r^n = x$. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors on a*
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ est la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$, et le réel $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ est appelé moyenne géométrique de $x_1, \ldots, x_n$.

1. Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne aura-t-il subi sur ces trois années (on ne demande pas de faire l'application numérique) ?

2. Démontrer l'inégalité pour $n = 2$.

3. Cas général : on note m la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.
Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)$, puis conclure (on pourra utiliser librement l'inégalité classique suivante : pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$ où ln désigne la fonction logarithme népérien).

Exercice 4 (Une identité binomiale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \binom{2n}{k} - (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \right).$$

   C'est une somme télescopique de la forme $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$. Elle vaut $u_n - u_0$, donc
$$(-1)^n \binom{2n}{n} - (-1)^0 \binom{2n}{0} = (-1)^n \binom{2n}{n} - 1.$$

2. En déduire la valeur de la somme
$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

   En utilisant la formule du triangle de Pascal,
$$\begin{aligned}
S &= (-1)^0 \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{2n}{k} + \binom{2n}{k-1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \binom{2n}{k} - (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \right) \\
&= 1 + (-1)^n \binom{2n}{n} - 1 = (-1)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel positif ou nul. On appelle racine n-ième de x, noté $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ l'unique réel positif ou nul r tel que $r^n = x$. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors on a*
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ *est la moyenne arithmétique de* $x_1, \ldots, x_n$*, et le réel* $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ *est appelé moyenne géométrique de* $x_1, \ldots, x_n$*.*

1. Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne aura-t-il subi sur ces trois années (on ne demande pas de faire l'application numérique) ? Augmenter un prix de 20% revient à multiplier ce prix par 1.2. En effet si p est l'ancien prix, le nouveau prix est $p + p \times 20/100 = 1.2p$. Au cours des trois années, le prix a donc été multiplié par $1.2 \times 1.05 \times 1.25$. Trouver l'augmentation moyenne sur les trois années revient à chercher un réel a tel $a^3 = 1.2 \times 1.05 \times 1.25$, donc $a = \sqrt[3]{1.2 \times 1.05 \times 1.25}$. On trouve alors $a \approx 1.163483386$. L'augmentation moyenne est donc d'environ $16,3\%$

2. Démontrer l'inégalité pour $n = 2$. On a $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geqslant 0$, car un carré est positif ou nul. On en déduit donc que $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$, d'où le résultat en divisant par 2.

3. Cas général : on note m la moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$.

4. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure. On a

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k - n = \frac{1}{m} \times n \times m - m = 0$$

D'après l'inégalité de l'indication, on a pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_k}{m} - 1 \geqslant \ln \frac{x_k}{m}$, d'où en sommant on a

$$\begin{aligned} S = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) &\geqslant \ln \frac{x_1}{m} + \cdots + \ln \frac{x_n}{m} \\ &= \ln\left(\frac{x_1}{m} \times \cdots \times \frac{x_n}{m}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \end{aligned}$$

Comme $S = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \leqslant 0 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n} \leqslant 1 \\ \Longrightarrow \quad & x_1 \times \cdots \times x_n \leqslant m^n \\ \Longrightarrow \quad & \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant m. \end{aligned}$$