Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

Devoir MAISON N4

Nombres Complexes

Dans toute la suite du problème, on pose $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte (autrement dit les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne sont pas acceptées).

1. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$

2. On pose $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$

   (a) Montrer que $x_1 > 0$.

   (b) Montrer que $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Développer l'expression $x_1 x_2$, puis linéariser les produits obtenus.

   (d) En déduire que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.

   (e) Donner une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux.

3. On pose $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta, \quad y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos \theta + \cos 13\theta, \quad y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$

   (a) En s'inspirant de la méthode précédente, calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

   (b) En déduire des expressions de y_1, y_2, y_3 et de y_4 à l'aide de radicaux.

4. Donner finalement une expression de $\cos \dfrac{\pi}{17}$ et de $\cos \dfrac{2\pi}{17}$ à l'aide de radicaux.

1. On connait la formule : $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y) = \sin(x+y)-\sin(y-x)$.

   On en déduit : $2\sin h\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+(2k+1)h) - \sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+(2k-1)h)$.

   Il y a une simplification « téléscopique » et il reste :

   $2\sin h\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \sin(a+(2n-1)h)-\sin(a-h)$

   On utilise maintenant la formule $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

   Ainsi $2\sin h\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = 2\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)$.

   On a donc obtenu l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$.

2. (a) On a $6\theta = \pi - 11\theta$ donc $\cos 11\theta = -\cos 6\theta$.

   D'autre part, $0 < 3\theta < 5\theta < 6\theta < 7\theta < \dfrac{\pi}{2}$.

   Il en découle $0 < \cos 7\theta < \cos 6\theta < \cos 5\theta < \cos 3\theta < 1$.

   Ainsi : $x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta = \underbrace{\cos 3\theta}_{>0} + \underbrace{(\cos 5\theta - \cos 6\theta)}_{>0} + \underbrace{\cos 7\theta}_{>0}$.

   On en déduit $x_1 > 0$.

(b) On a $x_1 + x_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + 2kh)$ avec $a = h = \theta$ et $n = 8$.

On en déduit $x_1 + x_2 = \dfrac{\sin(nh)\cos(a + (n-1)h)}{\sin h} = \dfrac{\sin 8\theta\ \cos 8\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin 16\theta}{2\sin\theta}$.

Mais $16\theta = \pi - \theta$ donc $\sin 16\theta = \sin\theta$. On en déduit $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$.

(c) On développe et on trouve :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= (\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta)(\cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta)\\
&= \cos 3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\cos 9\theta + \cos 3\theta\cos 13\theta + \cos 3\theta\cos 15\theta\\
&\quad + \cos 5\theta\cos\theta + \cos 5\theta\cos 9\theta + \cos 5\theta\cos 13\theta + \cos 5\theta\cos 15\theta\\
&\quad + \cos 7\theta\cos\theta + \cos 7\theta\cos 9\theta + \cos 7\theta\cos 13\theta + \cos 7\theta\cos 15\theta\\
&\quad + \cos 11\theta\cos\theta + \cos 11\theta\cos 9\theta + \cos 11\theta\cos 13\theta + \cos 11\theta\cos 15\theta
\end{aligned}$$

On applique la formule $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$:

$$\begin{aligned}
&2(x_1 + x_2)\\
&= \cos 4\theta + \cos 2\theta + \cos 12\theta + \cos 6\theta + \cos 16\theta + \cos 10\theta + \cos 18\theta + \cos 12\theta\\
&\quad + \cos 6\theta + \cos 4\theta + \cos 14\theta + \cos 4\theta + \cos 18\theta + \cos 8\theta + \cos 20\theta + \cos 10\theta\\
&\quad + \cos 8\theta + \cos 6\theta + \cos 16\theta + \cos 2\theta + \cos 20\theta + \cos 6\theta + \cos 22\theta + \cos 8\theta\\
&\quad + \cos 12\theta + \cos 10\theta + \cos 20\theta + \cos 2\theta + \cos 24\theta + \cos 2\theta + \cos 26\theta + \cos 4\theta\\
&= 4\cos 2\theta + 4\cos 4\theta + 4\cos 6\theta + 3\cos 8\theta + 3\cos 10\theta + 3\cos 12\theta + \cos 14\theta\\
&\quad + 2\cos 16\theta + 2\cos 18\theta + 3\cos 20\theta + \cos 22\theta + \cos 24\theta + \cos 26\theta
\end{aligned}$$

(d) Pour tout entier k, $\cos(34 - k)\theta = \cos(2\pi - k\theta) = \cos k\theta$.

En particulier : $\begin{cases} \cos 26\theta = \cos 8\theta, \quad \cos 24\theta = \cos 10\theta, \quad \cos 22\theta = \cos 12\theta\\ \cos 20\theta = \cos 14\theta, \quad \cos 18\theta = \cos 16\theta \end{cases}$

On en déduit :

$x_1 x_2 = 2(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta + \cos 10\theta + \cos 12\theta + \cos 14\theta + \cos 16\theta)$.

D'autre part, pour tout entier k, on a $\cos(17 - k)\theta = \cos(\pi - k\theta) = -\cos\theta$.

En particulier :

$\begin{cases} \cos 2\theta = -\cos 15\theta,\ \cos 4\theta = -\cos 13\theta,\ \cos 6\theta = -\cos 11\theta,\ \cos 8\theta = -\cos 9\theta\\ \cos 10\theta - \cos 7\theta,\ \cos 12\theta = -\cos 5\theta,\ \cos 14\theta = -\cos 3\theta,\ \cos 16\theta = -\cos\theta \end{cases}$

On en déduit :

$x_1 x_2 = -2(\cos 15\theta + \cos 13\theta + \cos 11\theta + \cos 9\theta + \cos 7\theta + \cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta)$.

Ainsi $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.

(e) On a $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$ et $x_1 x_2 = -1$.

x_1, x_2 sont donc les solutions de $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0$, c'est-à-dire de $2x^2 - x - 2 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 17$, et $x_1 > 0$. Ainsi : $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$.

3. (a) On linéarise :

$$\begin{aligned}
y_1y_2 &= (\cos 3\theta+\cos 5\theta)(\cos 7\theta+\cos 11\theta)\\
&= \frac{1}{2}(\cos 10\theta+\cos 4\theta+\cos 14\theta+\cos 8\theta+\cos 12\theta+\cos 2\theta+\cos 16\theta+\cos 6\theta)\\
&= \frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta+\cos 10\theta+\cos 12\theta+\cos 14\theta+\cos 16\theta)\\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\,x_1x_2) = \frac{1}{4}\,x_1x_2 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De même, toujours par linéarisation :

$$\begin{aligned}
y_3y_4 &= (\cos\theta+\cos 13\theta)(\cos 9\theta+\cos 15\theta)\\
&= \cos\theta\cos 9\theta+\cos\theta\cos 15\theta+\cos 13\theta\cos 9\theta+\cos 13\theta\cos 15\theta\\
&= \frac{1}{2}(\cos 10\theta+\cos 8\theta+\cos 16\theta+\cos 14\theta+\cos 22\theta+\cos 4\theta+\cos 28\theta+\cos 2\theta)
\end{aligned}$$

On sait que $\cos 28\theta=\cos 6\theta$ et que $\cos 22\theta=\cos 12\theta$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
y_3y_4 &= \frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta+\cos 10\theta+\cos 12\theta+\cos 14\theta+\cos 16\theta)\\
&= \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\,x_1x_2) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(b) On a $y_1+y_2=x_1$ et $y_3+y_4=x_2$.

– Calcul de y_1 et de y_2 : On a $y_1+y_2=x_1$ et $y_1y_2=-\dfrac{1}{4}$.

  y_1, y_2 sont donc les solutions de $y^2-x_1y-\dfrac{1}{4}=0$, de discriminant $\Delta=x_1^2+1>0$.

  D'autre part $0<3\theta<5\theta<\dfrac{\pi}{2}$ donc $y_1=\cos 3\theta+\cos 5\theta>0$, et $y_2<0$.

  On en déduit $y_1=\dfrac{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$.

  De même et $y_2=\dfrac{x_1-\sqrt{x_1^2+1}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$.

– Calcul de y_3 et de y_4 : On a $y_3+y_4=x_2$ et $y_3y_4=-\dfrac{1}{4}$.

  y_3, y_4 sont donc les solutions de $y^2-x_2y-\dfrac{1}{4}=0$, de discriminant $\Delta=x_2^2+1>0$.

  D'autre part $\dfrac{\pi}{2}<9\theta<15\theta<\pi$ donc $y_4=\cos 9\theta+\cos 15\theta<0$, et $y_3>0$.

  On en déduit $y_3=\dfrac{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

  De même, $y_4=\dfrac{x_2-\sqrt{x_2^2+1}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

4. On a $y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta = 2\cos 4\theta \cos\theta = -2\cos 13\theta \cos\theta$.

   D'autre part, $y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta$ (en effet $13\theta + 4\theta = \pi \Rightarrow \cos 4\theta = -\cos 13\theta$.)

   Ainsi $\cos\theta + \cos 13\theta = y_3$ et $\cos\theta\cos 13\theta = -\dfrac{y_1}{2}$.

   On en déduit que $\cos\theta$ et $\cos 3\theta$ sont les solutions de $2t^2 - 2y_3 t - y_1 = 0$.

   Le discriminant est $\Delta = y_3^2 + 2y_1$.

   On a $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} < 13\theta < \pi$ donc $\cos\theta > 0$ et $\cos 13\theta < 0$.

   $\cos\theta$ est donc la solution positive de l'équation $2t^2 - 2y_3 t - y_1 = 0$.

   On en déduit $\cos\theta = \dfrac{y_3 + \sqrt{y_3^2 + 2y_1}}{2}$.

   Après calcul (euh... après Maple) on trouve :

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{16}\Bigg(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\qquad + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\,(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Bigg)\end{aligned}$$

   De même $\begin{cases} y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta = 2\cos 9\theta \cos 2\theta \\ y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta = \cos 9\theta - \cos 2\theta \end{cases}$

   Ainsi $\cos 2\theta + (-\cos 9\theta) = -y_4$ et $\cos 2\theta(-\cos 9\theta) = -\dfrac{y_2}{2}$.

   On en déduit que $\cos 2\theta$ et $-\cos 9\theta$ sont les solutions de $2t^2 + 2y_4 t - y_2 = 0$.

   Le discriminant est $\Delta = y_4^2 + 2y_2$.

   On a d'autre part $-\cos 9\theta = \cos 8\theta$ et $0 < \theta < 8\theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos 8\theta < \cos 2\theta < 1$.

   On en déduit $\cos 8\theta = \dfrac{-y_4 - \sqrt{y_4^2 + 2y_2}}{2}$ et $\cos 2\theta = \dfrac{-y_4 + \sqrt{y_4^2 + 2y_2}}{2}$

   On trouve :

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{1}{16}\Bigg(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\qquad + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\,(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Bigg)\end{aligned}$$

   C'est la formule découverte par Gauss le 30 mars 1796, à l'âge de 19 ans, et qui permet d'établir que l'heptadécagone (le polygône régulier convexe à 17 cotés) est constructible à la règle et au compas.