Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

PRÉPAS ELBILIA

Simulation DS (2h
Logie-Ensembles et Applications

☒imulation☒D☒

Exercice 1.

Soient P et Q deux propositions logiques.

1. Montrer que
$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \equiv ((\textsc{non}\,\mathrm{P})\ \textsc{ou}\ \mathrm{Q})$$

2. En déduire que
$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \equiv (\textsc{non}\,\mathrm{Q} \Longrightarrow \textsc{non}\,\mathrm{P})$$

Exercice 2.

On note $\mathscr{A}$ l'assertion suivante.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall y \in]x,+\infty[,\ \exists z \in]0,+\infty[,\ x < z < y$$

1. Écrire la négation de $\mathscr{A}$.

2. L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n$.

Exercice 4.

Prouver que $\forall a \in]0,1[, \quad \forall n \geqslant 2$,

$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Exercice 5.

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E tels que

$$\mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{A}\cap\mathrm{C}\ ,\ \mathrm{B}\cup\mathrm{C} = \mathrm{B}\cap\mathrm{A}\ \text{ et }\ \mathrm{C}\cup\mathrm{A} = \mathrm{C}\cap\mathrm{B}.$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

PRÉPAS ELBILIA

Simulation DS (2h
Logie-Ensembles et Applications

☒imulation☒D☒

Exercice 1.

Soient P et Q deux propositions logiques.

1. Montrer que
$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \equiv ((\textsc{non}\,\mathrm{P})\ \textsc{ou}\ \mathrm{Q})$$

2. En déduire que
$$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}) \equiv (\textsc{non}\,\mathrm{Q} \Longrightarrow \textsc{non}\,\mathrm{P})$$

Exercice 2.

On note $\mathscr{A}$ l'assertion suivante.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall y \in]x,+\infty[,\ \exists z \in]0,+\infty[,\ x < z < y$$

1. Écrire la négation de $\mathscr{A}$.

2. L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n$.

Exercice 4.

Prouver que $\forall a \in]0,1[, \quad \forall n \geqslant 2$,

$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

Exercice 5.

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E tels que

$$\mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{A}\cap\mathrm{C}\ ,\ \mathrm{B}\cup\mathrm{C} = \mathrm{B}\cap\mathrm{A}\ \text{ et }\ \mathrm{C}\cup\mathrm{A} = \mathrm{C}\cap\mathrm{B}.$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Prof MAMOUNI
myismail.net
Prepas MPSI

Prepas El Bilha

Corrigé Simulation DS1
Logique - Ensembles - Applications

Exo 1

Dresser les tables de vérité

Exo 2

1) $\exists x \in]0,+\infty[, \exists y \in]x,+\infty[$
$\forall z \in]0,+\infty[, \; x < z < y$

$x \geq z$ ou $z \geq y$

2) On prendre $z = \dfrac{x+y}{2}$

Exo 3 récurrence double

Hérédité

supposons $u_{n-1} \geq n-1$
$u_n \geq n$

donc
$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geq 2n-1$

or $(2n-1)-(n+1) = n-2 \geq 0$ pour $n \geq 2$

donc $2n-1 \geq n+1$

donc $u_{n+1} \geq n+1$

Exo 4 supposons

$1-na < (1-a)^n$

et mq

$1-(n+1)a < (1-a)^{n+1}$

En effet

$1-na < (1-a)^n$

$\Downarrow$

$(1-na)(1-a) < (1-a)^{n+1}$

$\Downarrow$

$1-(n+1)a+na^2 < (1-a)^{n+1}$

Mais

$1-(n+1)a+na^2 <$ ~~~~~

CQFD

Supposons

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

Mq

$$(1-a)^{n+1} < \frac{1}{1+(n+1)a}$$

En effet

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-a)^{n+1} < \frac{1-a}{1+na}$$

Mais

$$\frac{1-a}{1-na} - \frac{1}{1+(n+1)a}$$

$$= \frac{1+(n+1)a - 1 + a}{(1-na)(1+(n+1)a)}$$

$$= \frac{na}{\quad} > 0$$

Ainsi $\frac{1-a}{1-na} < \frac{1}{1+(n+1)a}$

donc

$$(1-a)^{n+1} < \frac{1-a}{1-na} < \frac{1}{1+(n+1)a}$$

CQFD

<u>Exercice 5</u>

$A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$

$C \subset B \cup C = B \cap A \subset A$

d'où $A = C$

$B \subset B \cup C = B \cap A \subset A$

$A \subset C \cup A = C \cap B \subset B$

d'où $A = B$

d'où $A = B = C$