Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Devoir Surveille N1
Logie-Ensembles et Applications
Durée : 2 heures

Blague du jour :

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.

Mathématicien du jour **Fibonacci**

Leonardo Fibonacci (1175- 1250) est un mathématicien italien, connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise ». Son éducation mathématique s'est faite en grande partie en Afrique du Nord, pour des raisons commerciales. Ayant aussi voyagé en Egypte, en Syrie, il en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique

Exercice 1 —

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 8$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n$$

Exercice 2 — (Loi de Morgan).

Soient P et Q deux assertions logiques. Démontrer que : $\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$

Exercice 3 — (Quantificateurs).

1/ Ecrire la négation de chacune des deux assertions suivantes (où f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) :

a/ P : "$\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = M$"

b/ Q : "$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y - x| < \alpha) \Longrightarrow (|f(y) - f(x)| < \varepsilon)$"

2/ Exprimer à l'aide de quantificateurs les deux assertions suivantes.

a/ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. b/ La fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 — (Pour finir). On considère la suite réelle (u_n) définie en posant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n \\ \\ u_0 = \dfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad u_1 = 1 \end{cases}$$

1/ Calculer u_2 et u_3.

2/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, u_{n+1} u_n = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 5

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1) $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

3) $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.

4) $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 6

On considère une application $f : E \mapsto E$ vérifiant $f \circ f = f$.

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que $\underset{(i)}{(f \text{ injective })} \Longleftrightarrow \underset{(ii)}{(f \text{ surjective })}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f\big(f(A)\big) = f(A)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit une partie $A \subset E$. Montrer que $f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) = f^{-1}(A)$.

Corrigé du DS de Mathématiques n^0

Exercice 1 —

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 8$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n$ par récurrence double sur n. Notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n$.

➤ **Initialisation** ($n = 0$ et $n = 1$). D'après l'énoncé : $u_0 = 3 \times 2^0 - 2 \times (-1)^0$ et $u_1 = 3 \times 2^1 - 2 \times (-1)^1$. Les assertions $P(0)$ et $P(1)$ sont donc vraies.

➤ **Hérédité**. Supposons que les assertions $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain entier naturel n.

D'après l'énoncé on a : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

On en déduit, par hypothèse de récurrence : $u_{n+2} = 3 \times 2^{n+1} - 2 \times (-1)^{n+1} + 2\left(3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n\right)$.

D'où : $u_{n+2} = 12 \times 2^n - 2 \times (-1)^n = 3 \times 2^{n+2} - 2 \times (-1)^{n+2}$.

Cette dernière égalité signifie que l'assertion $P(n+2)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion**. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 2 \times (-1)^n$

Exercice 2 — (Loi de Morgan).

Soient P et Q deux assertions logiques. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	$\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}}$	$\overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Conclusion. $\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$

EXERCICE 3 — **(QUANTIFICATEURS).**

1/ a/ La négation de "$\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = M$" est $\boxed{\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq M}$

b/ La négation de "$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\alpha > 0,\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y-x| < \alpha) \Longrightarrow (|f(y) - f(x)| < \varepsilon)$"

est : $\boxed{\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,\alpha > 0,\ \exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y-x| < \alpha) \wedge (|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon)}$

2/ a/ L'assertion "f est croissante sur $\mathbb{R}$" peut se traduire par : $\boxed{\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y) \Longrightarrow (f(x) \leqslant f(y))}$.

b/ L'assertion "f est périodique sur $\mathbb{R}$" peut se traduire par : $\boxed{\exists\, T \in \mathbb{R}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)}$.

EXERCICE 4 — **(POUR FINIR).** On considère la suite réelle (u_n) définie en posant :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n \\ u_0 = \dfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad u_1 = 1 \end{cases}$$

1/ D'après l'énoncé : $u_2 = \dfrac{1}{2}\, u_0$ d'où $\boxed{u_2 = \dfrac{\pi}{4}}$. Et $u_3 = \dfrac{2}{3}\, u_1$ d'où $\boxed{u_3 = \dfrac{2}{3}}$.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $(n+1)\, u_{n+1} u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

➤ Initialisation $(n = 0)$. D'après l'énoncé : $(0+1)\, u_1 u_0 = \dfrac{\pi}{2}$. D'où $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

On a alors : $\quad (n+2)\, u_{n+2} u_{n+1} = (n+2)\, \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n u_{n+1}$ (d'après l'énoncé)

D'où : $\quad (n+2)\, u_{n+2} u_{n+1} = (n+1)\ u_n u_{n+1}$

D'où, par hypothèse de récurrence : $\quad (n+2)\, u_{n+2} u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$

Ce qui signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, u_{n+1} u_n = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 6

$\boxed{Q\,1}$

$(i) \Rightarrow (ii)$: soit $y \in E$. Puisque $f \circ f = f$, $f(y) = f\big(f(y)\big)$. Or f est injective, donc $y = f(y)$. Posons $x = f(y)$, on a $y = f(x)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: soient $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est surjective, il existe $(x'_1,x'_2) \in E^2$ tels que $x_1 = f(x'_1)$ et $x_2 = f(x'_2)$. On a donc $f\big(f(x'_1)\big) = f\big(f(x'_2)\big)$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(x'_1) = f(x'_2)$ c'est à dire $x_1 = x_2$.

$\boxed{Q\,2}$

$\subset$: soit $y \in f(A)$. Par définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $f \circ f = f$, $y = f\big(f(x)\big)$. Posons $z = f(x)$. On a $x \in A$ avec $z = f(x)$, et donc $z \in f(A)$ (définition de l'image directe). Puisque $y = f(z)$ avec $z \in f(A)$, on en déduit que $y \in f\big(f(A)\big)$ (définition de l'image directe).

$\supset$: soit $z \in f\big(f(A)\big)$. Par définition de l'image directe, $\exists y \in f(A)$ tel que $z = f(y)$. Comme $y \in f(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ (définition de l'image directe). Alors $z = f\big(f(x)\big) = f \circ f(x)$. Mais puisque $f \circ f = f$, on a $z = f(x)$. Comme $z = f(x)$ avec $x \in A$, on en déduit que $z \in f(A)$ (définition de l'image directe).

$\boxed{Q\,3}$

$\subset$: soit $x \in f^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)$. Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, on a donc $f(f(x)) \in A$. Mais comme $f \circ f = f$, on en tire que $f(x) \in A$, c'est à dire $x \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque).

$\supset$: soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in A$. Puisque $f \circ f = f$, on en tire que $f(f(x)) = f(x) \in A$. Par conséquent, $f(x) \in f^{-1}(A)$ (définition de l'image réciproque) et ensuite $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$ (définition de l'image réciproque).
