Prof. MAMOUNI
myismail.net
Prépas MPSI

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

DS N2

Durée : 4 heures

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1

On considère une suite (x_n) de réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$$

1. Montrer que x_0 ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.

2. Que peut valoir x_1 ? On distinguera les cas suivant les deux valeurs possibles de x_0.

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs possibles de S_0 ? S_1 ?

4. Montrer que, de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}}$. 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k$. 3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n$$

Démontrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Exercice 4

On pose $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{1-i}$.

(a) Donner l'écriture algébrique de Z.
(b) Donner une écriture exponentielle de Z.
(c) Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5

Déterminer des réels a, b, A, B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^3(x) = A\cos(ax) + B\cos(bx).$$

On pourra développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3$.

Exercice 6

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$ (b) $301 + 304 + 307 + \cdots + 739 + 742$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} 3^k$

$\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$.

Problème 1

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Dans la deuxième question de cet exercice, la notation $\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \le 2k \le n$.
De même, $\displaystyle\sum_{0 \le 2k+1 \le n}$ signifie que la somme porte sur les indices k tels que $0 \le 2k+1 \le n$.
Cela permet notamment de séparer élégamment les termes d'indices pairs et impairs d'une somme sans avoir à considérer la parité de n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0 \le 2k \le n} a_{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} a_{2k+1}$$

1. On définit la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x+1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Donner une expression développée de $f_n(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

b. En calculant $f_n'(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

c. En calculant $f_n''(1)$ de deux manières, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

d. Déduire des questions précédentes une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

2. On définit la fonction g_n telle que $g_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que $g_n(x) = 2\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} x^{2k}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. En calculant $g_n'(1)$ de deux manières, montrer que $\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} k\binom{n}{2k} = 2^{n-3}n$.

c. En calculant $g_n''(1)$ de deux manières, montrer que $\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} k^2\binom{n}{2k} = 2^{n-5}n(n+1)$.

Problème 2 : Relations d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, lorsque $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive.

1. Donner un exemple de relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, et un exemple de relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan.

2. On suppose $E \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et $y \in E$. On appelle classe d'équivalence de y, l'ensemble
   $cl\left(y\right) = \left\{x \in E\ ;\ x\mathcal{R}y\right\}$.
   Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit une relation sur $\mathbb{Z}$ par $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ m - n = kp$. $\mathcal{R}$ s'appelle relation de congruence modulo p dans $\mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (b) Quelles sont les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$? Combien y en a-t'il ?

4. Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $p \geqslant 2$. Soit $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \left|z\right| = 1\right\}$ et $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{U}$ par $z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow z_1^p = z_2^p$.

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{U}$.

   (b) Quelle est la classe de $z = e^{i\theta}$?

   (c) On définit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \to z^p \end{array} \right.$; f est-elle injective ?

   On note $\mathbb{U}/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, et on définit $\widehat{f} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{U}/\mathcal{R} \to \mathbb{U} \\ cl\left(z\right) \mapsto z^p \end{array} \right.$. Pourquoi cette définition de $\widehat{f}$ a-t'elle un sens ? Montrer que $\widehat{f}$ est injective.

CORRIGE

---

1. D'après l'énoncé, $x_0^3 = x_0^2$ donc $x_0 \in \{0, 1\}$.

2. Si $x_0 = 0$, alors $x_1^3 = x_1^2$ donc $x_1 \in \{0, 1\}$. Si $x_0 = 1$, alors $1 + x_1^3 = (1 + x_1)^2$ ce qui équivaut à $x_1(x_1^2 - x_1 - 2) = 0$ ou encore $x_1(x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0$ de sorte que $x_1 \in \{-1, 0, 2\}$.

3. Si $(x_0, x_1) = (0, 0)$, alors $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) = (0, 0)$.
Si $(x_0, x_1) = (0, 1)$, alors $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) = (0, 1)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, 0)$, alors $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) = (1, 1)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, -1)$, alors $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) = (1, 0)$.
Si $(x_0, x_1) = (1, 2)$, alors $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1) = (1, 3)$.

4. On raisonne par récurrence. On note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Tout d'abord, $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $\mathrm{S}_0 = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ ou $\mathrm{S}_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.
Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{S}_n = \frac{m(m+1)}{2}$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = \mathrm{S}_{n+1}^2 = (\mathrm{S}_n + x_{n+1})^2$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^3\right) + x_{n+1}^3 = \mathrm{S}_n^2 + x_{n+1}^3$$

On en déduit que

$$(\mathrm{S}_n + x_{n+1})^2 = \mathrm{S}_n^2 + x_{n+1}^3$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 2\mathrm{S}_n) = 0$$

Cette dernière égalité équivaut à

$$x_{n+1}(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - m(m+1)) = 0$$

ou encore

$$x_{n+1}(x_{n+1} + m)(x_{n+1} - (m+1)) = 0$$

de sorte que $x_{n+1} \in \{-m, 0, m+1\}$.
Si $x_{n+1} = -m$, alors $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n - m = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(m-1)((m-1)+1)}{2}$. Si $m \geq 1$, alors $m - 1 \in \mathbb{N}$. Sinon $m = 0$ et alors $\mathrm{S}_{n+1} = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$.
Si $x_{n+1} = 0$, alors $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n = \frac{m(m+1)}{2}$ et $m \in \mathbb{N}$.
Si $x_{n+1} = m+1$, alors $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et $m+1 \in \mathbb{N}$. Dans tous les cas de figure, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2^4)^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{16})^i \\
&= \frac{1}{2} \frac{1/16 - (1/16)^{n+1}}{1 - 1/16} \\
&= \boxed{\frac{1}{30}\left(1 - (1/16)^n\right)}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-3)^{i-1} = \frac{1}{-3} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-3)^i \\
&= \frac{1}{-3} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-3)^i - 1 \right) = \frac{1}{-3} \left((1-3)^n - 1 \right) \\
&= \boxed{\frac{1 - (-2)^n}{3}}
\end{aligned}$$

3. Ici, il y a un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} (2j+1) = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{6} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j(j+1)} = \frac{n(n+2)}{6}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n$$

Démontrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

L'astuce est de calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2$ qu'mesure la distance à 1 des nombres x_k. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 2x_k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n - 2n + n = 0 \end{aligned}$$

La somme S est nulle et c'est une somme de termes positifs, donc chacun de ces termes est nul, ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a$(x_k - 1)^2 = 0$, d'où $x_k = 1$.

1. On pose $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{1-i}$.

   (a) On a $Z = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{1-i} = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{1^2 + (-1)^2} = \dfrac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$.

   (b) Le module de $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ vaut $\frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \sqrt{2}$. On note θ un de ses arguments. On a $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$. D'où $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

   Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}}$. De même $\boxed{1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}}$.

   Ainsi $Z = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6} - \frac{-i\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$. D'où $\boxed{Z = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}}$.

   (c) En prenant les parties réelles de l'écriture algébrique et de l'écriture exponentielle de Z, on a

   $$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

1. Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3^2}\right)^i = 3\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{9}}.$

   (b) $301+304+307+\cdots+739+742 = \sum_{k=100}^{247}(3k+1) = \boxed{\frac{(301+742)}{2}\times 148}$. C'est une somme arithmétique de raison 3 avec 148 termes.

   (c) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}3^k &= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i}3^{i-1} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i}3^i \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i - \binom{n}{0}3^0 - \binom{n}{n+1}3^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left((3+1)^n - 1 - 0\right) \\
&= \boxed{\frac{4^n-1}{3}}
\end{aligned}$$

7. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$.

   Ici, il y a un découpage plus pratique que l'autre. On a

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\,\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}}.$$

1. $P : \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m^2 > 2017n$.
   non $P : \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m^2 \leqslant 2017n$.
   P est vraie car si $n \in \mathbb{N}$, on prend par exemple $m = \lfloor\sqrt{2107n}\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et on a bien $m^2 > 2017n$ car $m > \sqrt{2107n}$.
2. $P : \exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0, +\infty[, -x < y < x$.
   non $P : \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, -x \geqslant y \quad \text{ou} \quad y \geqslant x$.
   P est vraie car avec $y = 1$ et $x = 2$, on a $-2 < 1 < 2$, *i.e.* $-x < y < x$.
3. $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 9 \Rightarrow x > 3)$.
   non $P : \exists x \in \mathbb{R}, (x^2 > 9 \quad \text{et} \quad x \leqslant 3)$.
   non P est vraie car avec $x = -5$, on a $x \leqslant 3$ et $x^2 = 25 > 9$. Ainsi P est fausse.

Exercice 4 (Une identité binomiale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \binom{2n}{k} - (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \right).$$
   C'est une somme télescopique de la forme $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$. Elle vaut $u_n - u_0$, donc
$$(-1)^n \binom{2n}{n} - (-1)^0 \binom{2n}{0} = (-1)^n \binom{2n}{n} - 1.$$
2. En déduire la valeur de la somme
$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$
   En utilisant la formule du triangle de Pascal,
$$\begin{aligned}
S &= (-1)^0 \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{2n}{k} + \binom{2n}{k-1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \binom{2n}{k} - (-1)^{k-1} \binom{2n}{k-1} \right) \\
&= 1 + (-1)^n \binom{2n}{n} - 1 = (-1)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

2 Pour finir

Exercice 5 (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel positif ou nul. On appelle racine n-ième de x, noté $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ l'unique réel positif ou nul r tel que $r^n = x$. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors on a*
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Le réel $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ *est la moyenne arithmétique de* $x_1, \dots, x_n$, *et le réel* $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$ *est appelé moyenne géométrique de* $x_1, \dots, x_n$.

1. Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. Quelle variation moyenne aura-t-il subi sur ces trois années (on ne demande pas de faire l'application numérique) ? Augmenter un prix de 20% revient à multiplier ce prix par 1.2. En effet si p est l'ancien prix, le nouveau prix est $p + p \times 20/100 = 1.2p$. Au cours des trois années, le prix a donc été multiplié par $1.2 \times 1.05 \times 1.25$. Trouver l'augmentation moyenne sur les trois années revient à chercher un réel a tel $a^3 = 1.2 \times 1.05 \times 1.25$, donc $a = \sqrt[3]{1.2 \times 1.05 \times 1.25}$. On trouve alors $a \approx 1.163483386$. L'augmentation moyenne est donc d'environ $16,3\%$

2. Démontrer l'inégalité pour $n = 2$. On a $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geqslant 0$, car un carré est positif ou nul. On en déduit donc que $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$, d'où le résultat en divisant par 2.

3. Cas général : on note m la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$.

4. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)$, puis conclure. On a

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k - n = \frac{1}{m} \times n \times m - m = 0$$

D'après l'inégalité de l'indication, on a pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{x_k}{m} - 1 \geqslant \ln \frac{x_k}{m}$, d'où en sommant on a

$$\begin{aligned} S = \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{m} - 1\right) &\geqslant \ln \frac{x_1}{m} + \cdots + \ln \frac{x_n}{m} \\ &= \ln\left(\frac{x_1}{m} \times \cdots \times \frac{x_n}{m}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \end{aligned}$$

Comme $S = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n}\right) \leqslant 0 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{m^n} \leqslant 1 \\ \Longrightarrow \quad & x_1 \times \cdots \times x_n \leqslant m^n \\ \Longrightarrow \quad & \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant m. \end{aligned}$$

1. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

On a donc

$$f_n'(1) = 2^{n-1}n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

On a donc

$$f_n''(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

d. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-2}n(n-1) + 2n - 1n = 2^{n-2}n(n+1)$$

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \\
&= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-x)^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\
&= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} + \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k} - \sum_{0 \leq 2+1k \leq n} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} \\
&= 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} x^{2k}
\end{aligned}$$

b. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n'(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k\binom{n}{2k} x^{2k-1} = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k\binom{n}{2k} x^{2k-1}$$

On a donc

$$g_n'(1) = 2^{n-1}n = 4 \sum_{0 \leq 2k \leq n} k\binom{n}{2k}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} k\binom{n}{2k} = 2^{n-3}n.$

c. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n''(x) = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} 2k(2k-1)\binom{n}{2k} x^{2k-2}$$

On a donc

$$g_n''(1) = 2^{n-2}n(n-1) = \sum_{0\leq 2k\leq n} 4k(2k-1)\binom{n}{2k}$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = \frac{4k(2k-1)}{8} + \frac{k}{2}$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq 2k\leq n} k^2\binom{n}{2k} &= \frac{1}{4}\sum_{0\leq 2k\leq n} 2k(2k-1)\binom{n}{2k} + \frac{1}{2}\sum_{0\leq 2k\leq n} k\binom{n}{2k}\\ &= \frac{2^{n-2}n(n-1)}{8} + \frac{2^{n-3}n}{2} = 2^{n-5}n(n+1)\end{aligned}$$