

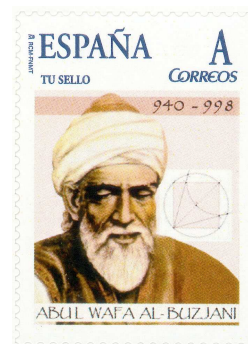
Mercredi 23 Janvier 2017

## Structures Algébriques

Sous groupes de  $(\mathbb{R}, +)$

### Abu Al-Wafa Al Buzjani (940-998)

Mathématicien persan-musulman (Buzjan de Khorassan) principalement connu pour ses apports en trigonométrie. On lui doit la notion de cercle trigonométrique, celles de sécante et cosécante. On lui attribue aussi la formule des sinus en trigonométrie sphérique  $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ . Il développe aussi une théorie sur les nombres négatifs les associant à l'image d'une dette : 3 - 5 représentant par exemple une dette de 2. Il accepte de multiplier ces nombres négatifs par des positifs et de les incorporer dans des calculs.



### 😊 Blague du jour

- ☛ Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle. Tu ne manges plus ton gryère alors ?  
**Réponse** : Si, mais je ne mange plus que les trous !
- ☛ Comment appelle t-on un chien sans pattes ? **Réponse** : On ne l'appelle pas, on va le chercher !
- ☛ Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ? **Réponse** : Une souris.

## 2.1 Classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$

Pour un réel strictement positif  $\alpha > 0$ , on note  $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha ; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Q 2** Montrez que  $\forall \alpha > 0$ , la partie  $\alpha\mathbb{Z}$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Q 3** Montrez que  $\mathbb{Q}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

On considère maintenant un sous-groupe  $G$  du groupe  $(\mathbb{R}, +)$ . On va montrer l'alternative :

1.  $G$  est de la forme  $\alpha\mathbb{Z}$  avec  $\alpha > 0$  ;
2. ou alors  $G$  est une partie dense de  $\mathbb{R}$ .

On note

$$G^+ = G \cap ]0, +\infty[ = \{x \in G \mid x > 0\}$$

**Q 4** Si l'on suppose que  $G \neq \{0\}$ , montrez que la partie  $G^+$  est non-vidée, et qu'elle admet une borne inférieure  $\alpha \geq 0$ . Que vaut cette borne inférieure  $\alpha$  lorsque  $G = \mathbb{Z}$  et lorsque  $G = \mathbb{Q}$  ?

On suppose dans un premier temps que  $\alpha > 0$ .

**Q 5** Montrez que  $\alpha \in G^+$ . On pourra pour cela raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation de la borne inférieure avec  $\varepsilon = \alpha$ .

**Q 6** Montrez alors que  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .

On suppose maintenant que  $\alpha = 0$ .

**Q 7** Montrez que la partie  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Applications

On considère deux réels  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ . On définit alors

$$G(a,b) = \{pa + qb ; (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

**Q 8** Montrez que  $G(a,b)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .

**Q 9** On suppose dans cette question que  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{1}{5}$ .

1. Montrez que la borne inférieure  $\alpha$  de  $G^+$  vérifie  $\alpha \geq \frac{1}{15}$  ;
2. Déterminez deux entiers  $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $5u + 3v = 1$  ;
3. En déduire que  $G(1/3,1/5) = \frac{1}{15}\mathbb{Z}$ .

**Q 10** On suppose dans cette question que  $a = 1$  et  $b = \sqrt{3}$ . On note  $\alpha$  la borne inférieure de la partie  $G^+$ .

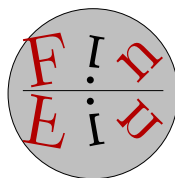
1. Montrez que le réel  $\sqrt{3}$  est irrationnel ;
2. Montrez que  $\alpha = 0$ .

On a donc montré que le sous-groupe  $G(1,\sqrt{3})$  était dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Q 11** On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  continue qui est à la fois 1-périodique et  $\sqrt{3}$ -périodique. On notera

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(0)\}$$

1. Montrez que  $G(1,\sqrt{3}) \subset H$  ;
2. Soit un réel  $x \in \mathbb{R}$ . Montrez qu'il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $H$  qui converge vers le réel  $x$  ;
3. En déduire que la fonction  $f$  est constante.



Mercredi 23 Janvier 2017

# Structures Algébriques

Sous groupes de  $(\mathbb{R}, +)$

Niveau IV

Le but de ce problème est de montrer dans un premier temps que les sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  sont soit de la forme  $a\mathbb{Z}$  avec  $a$  réel, soit denses dans  $\mathbb{R}$ . On appliquera ensuite ce résultat à la caractérisation de l'irrationalité d'un réel ainsi qu'à une étude de la périodicité de fonctions continues.

## Préambule

On dit qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$ .

Montrer que  $A$  partie dense dans  $\mathbb{R}$  équivaut à

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, \quad \exists a \in A : x < a < y.$$

## Partie 1 - Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$ .

1.1 Soit  $\alpha$  un réel, justifier que  $\alpha\mathbb{Z}$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ .

1.2 Soit  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha$  un élément de  $H$ , quel lien a-t-on entre  $H$  et  $\alpha\mathbb{Z}$ ?

Soient  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  que l'on suppose non réduit à  $\{0\}$  et  $K = H \cap \mathbb{R}_+$ .

1.3 Justifier que  $K$  admet une borne inférieure  $a$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

1.4 Montrer que si  $a$  est strictement positif alors  $a$  est dans  $K$  (ind. : on pourra supposer  $a$  strictement positif et n'étant pas dans  $K$  puis en déduire une contradiction).

1.5 Montrer que si  $a$  est strictement positif alors  $H = a\mathbb{Z}$ .

1.6 On suppose maintenant que  $a$  est nul. Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ .

a. Justifier qu'il existe  $h$  dans  $K$  tel que  $0 < h < y - x$ .

b. En déduire qu'il existe un entier relatif  $n$  tel que  $\frac{x}{h} < n < \frac{y}{h}$  puis que l'on peut trouver un élément  $g$  de  $H$  tel que  $x < g < y$ .

c. Conclure.

## Partie 2 - Un critère d'irrationalité.

Pour tout réel  $\theta$ , on note  $H_\theta := \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \{p\theta + q \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

2.1 Vérifier que  $H_\theta$  est le sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  engendré par 1 et  $\theta$ .

2.2 Montrer qu'un réel  $\theta$  est irrationnel si et seulement si  $H_\theta$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

2.3 Montrer qu'un réel  $\theta$  est irrationnel si et seulement si il existe deux suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers relatifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n\theta - q_n \neq 0 \tag{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n\theta - q_n) = 0 \tag{2}$$

## Partie 3 - Irrationalité de $e$ .

3.1 Justifier que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  converge (on rappelle que sa somme est  $e$ , ceci pourra être utilisé sans justification).

3.2 En utilisant la partie 2, montrer l'irrationalité de  $e$ .

**Partie 4 - Fonctions périodiques.**

Dans cette partie on considèrera uniquement des fonctions définies et continues sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $T$  un réel non nul, on dit qu'une fonction  $f$  a une période  $T$  si pour tout réel  $x$ ,  $f(x + T) = f(x)$ .

**4.1** Montrer que toute fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**4.2** Le but de cette question est de montrer qu'une fonction,  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , non constante et périodique admet parmi ses périodes strictement positives, une plus petite période. Pour cela on va considérer l'ensemble

$$P := \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} f(x + T) = f(x)\}$$

**a.** Justifier que l'ensemble  $P$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  non réduit à  $\{0\}$ .

**b.** Que doit-on montrer sur  $a$  la borne inférieure de  $P \cap \mathbb{R}_+^*$  pour que le but de la question soit atteint ? En utilisant les résultats de la partie 1, que cela revient-il à montrer sur  $P$  ?

**c.** On suppose que  $P$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , en utilisant la continuité de  $f$  montrer qu'alors pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = f(0)$ .

**d.** Conclure.

On considère  $f$  continue périodique de plus petite période strictement positive  $\alpha$  et  $g$  continue périodique de plus petite période strictement positive  $\beta$ . On cherche à caractériser les cas où  $f + g$  est périodique.

**4.3** On suppose que  $\frac{\alpha}{\beta}$  est rationnel, ou de façon équivalente, qu'il existe deux entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que  $q\alpha = p\beta$ .

Montrer que  $T := q\alpha = p\beta$  est une période de  $f + g$ .

**4.4** On suppose maintenant  $\frac{\alpha}{\beta}$  irrationnel et qu'il existe un réel  $T$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $(f + g)(x + T) = (f + g)(x)$ .

On définit sur  $\mathbb{R}$  les fonctions  $h$  et  $k$  par  $h(x) = f(x + T) - f(x)$  et  $k(x) = g(x + T) - g(x)$ .

**a.** Montrer que  $h$  et  $k$  ont à la fois  $\alpha$  et  $\beta$  pour périodes (ind. : on pourra penser à considérer  $h + k$ ).

**b.** En déduire que tous les éléments non nuls de  $(\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z})$  sont des périodes de  $h$  et  $k$  puis que  $h$  et  $k$  sont des fonctions constantes (ind. : on pourra penser à utiliser la question 4.2).

**c.** En considérant la suite  $(f(nT))_n$  montrer que la fonction  $h$  est la fonction nulle. Que pouvez-vous dire sur la fonction  $k$  ?

**d.** Déduire des questions précédentes que  $T$  est un élément de  $(\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z})$  et conclure que  $T = 0$ .

**4.5** Énoncer un résultat donnant la caractérisation de la périodicité de  $f + g$ .

## Structures Algébriques

### Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$

### Corrigé

**Q 2** Vérifions que  $\alpha\mathbb{Z}$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  :

–  $0 \in \alpha\mathbb{Z}$  ( $0 = 0 \times \alpha$ ) ;

– Soient deux éléments  $(x, y) \in (\alpha\mathbb{Z})^2$ . Montrons que  $(x - y) \in \alpha\mathbb{Z}$ . Comme  $x \in \alpha\mathbb{Z}$ , il existe  $k_1 \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = k_1\alpha$ . De même, il existe  $k_2 \in \mathbb{Z}$  tel que  $y = k_2\alpha$ . Alors  $x - y = (k_1 - k_2)\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$ .

**Q 3** On le vérifie facilement comme à la première question.

**Q 4** Comme on suppose que  $G \neq \{0\}$ , il existe un élément  $g \neq 0$  dans la partie  $G$ . Comme  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , son symétrique  $-g$  est également un élément de  $G$ . L'un des deux éléments  $g$  ou  $-g$  est strictement positif et appartient donc à l'ensemble  $G^+$ . Par conséquent,  $G^+ \neq \emptyset$ .

Comme  $G^+$  est une partie non-vide de  $\mathbb{R}$  minorée par 0, elle admet une borne inférieure  $\alpha$  et puisque 0 est un minorant de  $G^+$ ,  $0 \leq \alpha$  (la borne inférieure d'une partie est le plus grand des minorants).

**Q 5** Supposons par l'absurde que  $\alpha \notin G$ . D'après la caractérisation de la borne inférieure de  $G^+$ , avec  $\varepsilon = \alpha > 0$ , il existe  $g_1 \in G^+$  tel que  $\alpha < g_1 < 2\alpha$ . En posant ensuite  $\varepsilon = g_1 - \alpha > 0$ , il existe  $g_2 \in G^+$  tel que  $\alpha < g_2 < g_1$ . Posons  $g = g_1 - g_2$ . Puisque  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ ,  $g_1 - g_2 \in G$ . Or  $g > 0$  et donc  $g \in G^+$ . Mais alors on aurait  $\alpha < g_2 < g_1 < 2\alpha$ , et donc  $0 < g < \alpha$ , ce qui est impossible puisque  $\alpha = \inf G^+$ .

**Q 6** Comme  $\alpha \in G$ , montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}, n\alpha \in G$ . Par récurrence sur  $n$  :

$$\mathcal{P}(n) : n\alpha \in G$$

$\mathcal{P}(0)$  est vérifiée puisque comme  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ ,  $0 \in G$ .

$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$  D'après  $\mathcal{P}(n)$ ,  $n\alpha \in G$ . Comme  $\alpha \in G$  et que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha + n\alpha \in G$ . Donc  $(n+1)\alpha \in G$ .

Ensuite, montrons que  $\forall k \in \mathbb{Z}, k\alpha \in G$ . Si  $k \geq 0$ , on a montré que  $k\alpha \in G$ . Si  $k < 0$ , alors  $-k \in \mathbb{N}$  donc  $(-k)\alpha \in G$ . Mais comme  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , le symétrique d'un élément est encore dans  $G$ . Par conséquent,  $-(-k)\alpha = k\alpha \in G$ .

On a donc montré que  $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ . Montrons maintenant que  $G \subset \alpha\mathbb{Z}$ .

Soit  $g \in G$ . Comme  $\alpha > 0$ , d'après un théorème du cours, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $k\alpha \leq g < (k+1)\alpha$ . On a  $0 \leq g - k\alpha < \alpha$ . Mais comme  $k\alpha \in G$  (montré précédemment) et que  $g \in G$ , puisque  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , il vient que  $h = g - k\alpha \in G$ . Or  $\alpha = \inf G^+$ , et donc il est impossible que  $h > 0$  puisque  $h < \alpha$ . Par conséquent, la seule possibilité est que  $h = 0$ , c'est à dire  $g = k\alpha$ . Mais alors  $g \in \alpha\mathbb{Z}$ .

**Q 7** Soit un réel  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrons qu'il existe  $g \in G$  tel que  $|g - x| \leq \varepsilon$ .

Comme  $0 = \inf G^+$ , par la caractérisation de  $\inf G^+$ , il existe un élément  $g^+ \in G^+$  tel que  $0 < g^+ < \varepsilon$ . Alors d'après un théorème du cours, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $kg^+ \leq x < (k+1)g^+$ . On a alors  $0 \leq x - kg^+ < g^+ < \varepsilon$ . Mais puisque  $g^+ \in G$ , et que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , on a  $kg^+ \in G$ . Posons donc  $g = kg^+ \in G$ . Puisque  $0 \leq x - g < \varepsilon$ , on a bien  $|x - g| \leq \varepsilon$ .

**Q 8** On le montre facilement.

Q 9

1. Soit  $g \in G(1/3, 1/5)^+$ . Il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $g = \frac{p}{3} + \frac{q}{5} = \frac{5p+3q}{15}$ . Mais comme l'entier  $(3p+5q)$  est non nul ( $g \in G^+$ ), il vérifie  $|3p+5q| \geq 1$  et donc  $g = |g| \geq \frac{1}{15}$ . Donc  $1/15$  est un minorant de l'ensemble  $G^+$  et donc sa borne inférieure vérifie  $1/15 \leq \alpha$ .
2. Il suffit de poser  $u = 2$  et  $v = -3$ .
3. Comme  $1/15 \in G^+$ , on a  $\alpha \leq 1/15$  et d'après la question précédente, on tire que  $\alpha = 1/15$ .
4. Comme  $G(1/3, 1/5)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , et que  $\alpha > 0$ , d'après l'étude précédente, on sait que  $G(1/3, 1/5) = \alpha\mathbb{Z}$ .

Q 10

1. Par l'absurde, si  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ , il existerait  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\sqrt{3} = p/q$ , mais alors on aurait  $3q^2 = p^2$ . Or en examinant la décomposition de  $p^2$  en facteurs premiers, on voit que la puissance de 3 doit être paire, alors que dans la décomposition de  $3q^2$  en facteurs premiers, cette puissance est impaire, une absurdité.
2. Par l'absurde, si  $\alpha > 0$ , on aurait alors  $G(1, \sqrt{3}) = \alpha\mathbb{Z}$ . Par conséquent, puisque  $1 \in G$  et que  $\sqrt{3} \in G$ , il existerait deux entiers  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $1 = q\alpha$  et  $\sqrt{3} = p\alpha$ . On aurait alors  $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , une absurdité.

Q 11

- On montre facilement par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+p) = f(x)$ , puis que  $\forall q \in \mathbb{Z}, f(x+q\sqrt{3}) = f(x)$  et enfin que  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, f(p+q\sqrt{3}) = f(0)$ . Donc  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, p+q\sqrt{3} \in H$  et donc  $G(1, \sqrt{3}) \subset H$ .
- Puisque  $G(1, \sqrt{3})$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h \in H \text{ tq } |x - h| \leq \varepsilon$$

En particulier, si  $n \in \mathbb{N}^*$ , en prenant  $\varepsilon = 1/n > 0$ , il existe  $x_n \in H$  tel que  $|x - x_n| \leq 1/n$ . On construit ainsi une suite d'éléments de  $G(1, \sqrt{3})$  c'est à dire d'éléments de  $H$  qui converge vers le réel  $x$ .

- Montrons que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Il existe une suite de points  $(x_n)$  de  $H$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ . Or puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in H$ , on a  $f(x_n) = f(0)$ . Comme la fonction  $f$  est continue au point  $x$ , et que la suite  $(x_n)$  converge vers  $x$ , d'après le théorème de l'image continue d'une suite, la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x)$ . Or puisque la suite  $(f(x_n))$  est constante, elle converge également vers  $f(0)$ . Par unicité de la limite, on en déduit que  $f(x) = f(0)$ . On a montré que la fonction  $f$  était constante.