Algèbre Linéaire

Chapitre 1

Blague du jour

Une femme arrive et voit son mari avec une tapette mouche...
- Que fais-tu ?
- Je chasse les mouches... - En as-tu tué?
- Oui, 3 mâles, 2 femelles
Intriguée, elle lui demande:
- Comment fais-tu la différence entre les femelles et les mâles ?
- 3 étaient sur la cafetière et 2 sur le téléphone.

Al-Khawarizmi (783-850)

Mathématicien du jour

Mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman arabophone d'origine Ouzbékistan, plus précisément de la ville khiva, appel jadis Khwarezm.
Il est à l'origine des mots algorithme (qui n'est autre que son nom latin) et algèbre (issu d'une méthode et du titre d'un de ces ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes et de l'habitude de désigner l'inconnue par la lettre x dans une équation.
Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé le père de l'algèbre , avec Diophante dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

Dans tout le résumé de cours $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

1 Structures d'espaces vectoriels.

1.1 Structures.

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE . coefficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant les axiomes suivants:

- $(E, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera not dorénavant par 0_E.
- $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x, \quad \forall x \in E, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
- $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y, \quad \forall(x, y) \in E^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
- $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x, \quad \forall x \in E, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
- $1.x = x, \quad \forall x \in E$.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- $0_E \in F$.
- $\forall(x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a: $x + \lambda y \in F$.

Autrement dit F est une partie de E stable pour les deux lois $+$ et . et qui hérite de E sa structure d'espace vectoriel .

Remarque 1

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est plus judicieux de remarquer qu'il est inclut dans un espace vectoriel , puis montrer que c'en est un sous-espace vectoriel .

Définition 3

On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux lois de composition interne $+, \times$ et d'une loi de composition externe ,., telle que:

1. $(A, +, .)$ soit un $\mathbb{K}$-ev
2. $(A, +, \times)$ soit un anneau, dont l'élément neutre pour la 2ème loi est not 1_A.
3. $\forall(x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition 4

Soit A une algèbre, une partie B de A est dite sous-algèbre de A si elle vérifie les propriétés suivantes:

- $1_A \in B$.

- $\forall(x, y) \in B^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}$ on a: $x + \lambda y \in B$ et $x \times y \in B$.

Autrement dit B est une partie de A stable pour les deux lois internes et celle externe, et qui hérite de A sa structure d'algèbre.

1.2 Familles particulières.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev , $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que x est une combinaison linéaires de x_k si

$$\exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Définition 6

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de E, s'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et se note $\text{Vect}\left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right)$. Autrement dit

$$x \in \text{Vect}\left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right) \iff \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Proposition 1

- Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathcal{B}$.
- Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Définition 7

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrices de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrices de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Définition 8

Une famille est dite lie lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 2

1. Toute famille contenant un élément nul est liée.
2. Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
3. Tout famille contenant une famille lie est aussi liée.
4. L'image par une application linéaire d'une famille lie est aussi liée.

Définition 9

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinaisons linéaires d'une famille libre sont gales alors leurs coefficients sont égaux.

Proposition 3

1. Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
2. Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
3. Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Définition 10

On appelle base toute famille la fois libre et génératrices.

Théorème 2

Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists ! (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'appellent coordonnes de x dans la base $\mathcal{B}$.

1.3 Notion de dimension.

Proposition 4

- Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathcal{B}$.
- Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Définition 11

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrices de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrices de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Définition 12

Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 5

1. Toute famille contenant un élément nul est liée.
2. Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
3. Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.
4. L'image par une application linéaire d'une famille lie est aussi liée.

Définition 13

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 3

Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinaisons linéaires d'une famille libre sont gales alors leurs coefficients sont gaux.

Proposition 6

1. Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
2. Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
3. Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Définition 14

On appelle base toute famille la fois libre et génératrices.

Théorème 4

Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists!(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ s'appellent coordonnes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 15

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrices finie.

Théorème 5

Théorème de la base incomplète
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrices finie pour avoir une base.

2 Polynômes.

2.1 Degré d'un polynôme.

Définition 16

Soit P un polynôme non nul, de coefficients a_k, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note $\deg P$.
Ce coefficient non nul d'indice maximal, s'appelle le coefficient dominant de P et se note $\mathrm{co}(P)$.
Par convention $\deg 0 = -\infty$.

L'ensemble des polynômes coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$, celui des polynômes de degré inférieur n, se note $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 2

- $\deg P = n \iff P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
- $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \iff \deg P \leq n$.

Proposition 7

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a les propriétés suivantes:

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, avec égalité dans le cas o $\deg P \neq \deg Q$ ou bien $\deg P = \deg Q$ mais $\deg P + \deg \neq 0$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

2.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 17

Soit A, B deux polynômes non nuls.

- On dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
- On dit que A et B sont associés si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $P = \lambda Q$.
- Un polynôme est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ quand ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et ses polynômes associés.

Proposition 8

Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si P divise Q avec $\deg P = \deg Q$. En particulier tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Théorème 6

$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0 \quad \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\quad A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$. Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Remarque 3

B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Algorithme d'Euclide.
Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux polynôme non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu' arriver un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de degré minimal, ce reste un fois normalisé, s'appelle le PGCD de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et se note $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

Définition 18

Deux polynômes sont dits premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est gal 1.

Proposition 9

Soient $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ deux polynômes non nuls, et $\mathbf{D}$ leurs PGCD, alors

$$P = DP', Q = DQ' \text{ avec } Q \wedge Q' = 1$$

Théorème 7

Théorème de Bézout.
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$A \wedge B = 1 \iff \exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } AU + BV = 1$$

Théorème 8

Théorème de Gauss.
Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]$ tel que A divise BC et $A \wedge B = 1$ alors A divise C.

Corollaire 1

- $A \wedge B = A \wedge C = 1 \Longrightarrow A \wedge BC = 1$.
- $A \wedge B = 1 \iff A \wedge B^{\beta} = 1 \iff A^{\alpha} \wedge B^{\beta} = 1$.
- Si A et B divisent C et sont premiers entre eux, alors AB divise C.

2.3 Racines d'un polynôme.

Définition 19

A chaque polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on associé la fonction réelle:

$$\begin{aligned} \widehat{P}(x) : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

appelle fonction polynomiale de P et on dit que $\alpha \in K$ est une racine de P si et seulement si $\widehat{P}(\alpha) = 0$, dans la suite on notera $P(\alpha) = 0$ au lieu de $\widehat{P}(\alpha)$.

Théorème 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in K$, alors α est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 10

Théorème de D'Alembert
Tout polynôme, non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 2

- Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 2 n'admet jamais de racine dans $\mathbb{K}$.
- Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximum n racines.
- Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

Théorème 11

Tout polynôme, non constant admet au moins un facteur (diviseur) irréductible.

Théorème 12

Tout polynôme, non constant, P se décompose de façon unique en facteurs irréductibles sous la forme

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et P_i des polynômes irréductibles unitaires.

Corollaire 3

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme

  $$P(X) = \lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}$$

  o les z_i sont les racines de P.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ou ceux de degré 2 discriminant strictement négatif.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme

  $$P(X) = \prod_{i=1}^{r} \lambda(X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{p} (X^2 - 2\mathfrak{Re}(z_i) + |z_i|^2)^{\beta_i}$$

  o les x_i sont les racines réelles de P et z_i ceux complexes non réelles.
  Il faut noter que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ racine de P, alors $\overline{z}$ aussi racine de P.

2.4 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 20

Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$, on appelle polynôme dérivé de P, le polynôme not P' défini par $P'(X) = n a_n X^{n-1} + \ldots + a_1$.

Proposition 10

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P' = n-1$ et $\mathrm{co}(P') = n\,\mathrm{co}(P)$. En particulier la dérivée d'un polynôme est nul si et seulement si il est constant.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $(P+\lambda Q)' = P' + \lambda Q'$, en conséquence l'application: $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$ est linéaire.

Définition 21

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence la drive k–me de P l'aide de la formule $P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$.
Et on convient d'crire $P^{(0)} = P$.

Proposition 11

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n-k$ et $\mathrm{co}P^{(k)} = A_n^k \mathrm{co}P$, avec la convention $\mathcal{A}_n^k = 0$ si $k > n$.
  En particulier la drive k–me d'un polynôme est nul si et seulement si ce polynôme est de degré inférieur $k-1$.
- Si $\deg = n$ alors $P^{(n)} = n!\mathrm{co}P$.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $(P+\lambda Q)^{(k)} = P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}$, en conséquence l'application: $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-k}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P^{(k)}(X) \end{array}$ est linéaire.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a:

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ Formule de Leibniz}$$

Définition 22

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(a) = \ldots P^{(n-1)}(a) = 0$ mais $P^{(n)}(a) \neq 0$. Et convient de dire que a est multiplicité nulle dans P lorsqu'elle n'est pas une racine de P.

Théorème 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \forall a \in \mathbb{K}$ on a: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Théorème 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a est une racine de P de multiplicité n
- $(X-a)^n$ divise P, $(X-a)^{n+1}$ ne divise pas P.
- $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^n$ avec $Q(a) \neq 0$.

2.5 polynômes scindés.

Définition 23

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si et seulement si toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}$.

Remarque 4

- Tout polynôme non constant est scindé dans $\mathbb{C}$.
- Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses racines sont réelles.

Théorème 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$P(X) = \mathrm{co}(P) \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)^{\alpha_k}$$

où z_k sont les racines de P et α_k leurs multiplicités respectives.
En particulier $\deg P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Formules de Vite-Newton entre racines et coefficients d'un polynôme scindé:
Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$ un polynôme scindé de degré n, et $z_1, \ldots, z_n$ ses racines distincts ou non,

on a les formules suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum\prod_{i<j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \displaystyle\sum\prod_{i_1<\ldots<i_k} z_{i_1}\ldots z_{i_k} = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{array}}$$

3 Applications linéaires.

3.1 généralités.

Définition 24

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante:

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a: } u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations:

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrive est inclut dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}\mathbf{som}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclut dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}\mathbf{l}_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 12

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes:

- Si $\mathcal{B} = \left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right)$ famille de vecteurs de E, et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors:

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k) \text{ en particulier } u\left(\text{Vect}(\mathcal{B})\right) = \text{Vect}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

- Deux applications linéaires gales sur une famille génératrices sont gales sur l'espace vectoriel tout entier.
- Une application linéaire est nulle si et seulement si elle est nulle sur la base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur la base.
- Si $\mathcal{B}$ famille génératrices de E, alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de Im u.
  En particulier si u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de F.
- Si $\mathcal{B}$ est libre dans E et u injective, alors $u(\mathcal{B})$ est libre dans F.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F.

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes:

- $u(0_E) = 0_F$.
- L'image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .
- $\ker u = \{x \in E$ tel que $u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.
- u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.
- Im $u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.
- u est surjective si et seulement si Im $u = F$.

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes:

- $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.
- La compose de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E),+,.,\circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
- La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E),\circ)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire de E.

3.2 Applications linéaires en dimension finie.

Théorème 16

- Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n est isomorphe $\mathbb{K}^n$.
- Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphe si et seulement si ils sont de même dimension.

Théorème 17

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est de dimension finie avec

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E).\dim_{\mathbb{K}}(F)$$

3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 25

Le rang d'une application linéaire, u, noté $\mathrm{rg}(u)$ est défini par la relation suivante:

$$\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}\, u.$$

Théorème 18

Formule du rang
Soit $u : E \to F$ linéaire avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on a le résultat suivant:

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \mathrm{Im}\, u$$

Corollaire 4

Soit $u : E \to F$ linéaire, on a les propriétés suivantes:

- u est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim E$.
- u est surjective $\mathrm{rg}(u) = \dim F$.
- u est bijective $\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F$.

Corollaire 5

Le rang est invariant par composition gauche ou a droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors: $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$.

Corollaire 6

Soit $u : E \to F$ linéaire o E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} u \text{ isomorphisme } &\Longleftrightarrow u \text{ injective} \\ &\Longleftrightarrow u \text{ injective} \end{aligned}$$

Corollaire 7

Un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini est bijectif si et seulement si il est injectif.

4 Somme d'espaces vectoriels.

4.1 généralités.

Définition 26

Soit E un espace vectoriel , F et G deux sous-espace vectoriel de E.

- On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel de E not $F + G$ définie par la relation suivante

$$x \in F + G \Longleftrightarrow \exists x_1 \in F,\ \exists x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

- Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note par $F \oplus G$.
- Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E, et dans ce cas

$$\forall x \in E,\ \exists! x_1 \in F \text{ et } \exists! x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Remarque 5

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathcal{B}_1 \subset F, \mathcal{B}_2 \subset G$, alors:

- $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1) + \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2)$.
- Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1) \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

Théorème 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors:

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémentaires alors: $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 9

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie alors:

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

4.2 Projection et projecteur.

Définition 27

Si $E = F \oplus G$, on rappelle que $\forall x \in E,\ \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

- x_1 s'appelle la projection de x sur F parallèlement G et se note $p_{F//G}(x)$.
- x_2 s'appelle la projection de x sur G parallèlement F et se note $p_{G//F}(x)$.

Proposition 15

Avec les notations précédentes l'application: $p = p_{F//G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_1 = p_{F//G}(x) \end{array}$ est linéaire et vérifie les propriétés suivantes:

1. $p^2 = p$.
2. $\mathrm{Im}\ p = F,\ \ker p = G$ en particulier
$$E = \mathrm{Im}\ p \oplus \ker p.$$

Définition 28

On appelle projecteur sur E, tout endomorphisme, p de E tel que

$$p^2 = p.$$

Proposition 16

Soit $\mathbf{p}$ un projecteur de $\mathbf{E}$, on a les propriétés suivantes:

1. $\mathbf{E} = \operatorname{Im} \mathbf{p} \oplus \ker \mathbf{p}$.
2. $x \in \operatorname{Im} \mathbf{p} \Longleftrightarrow \mathbf{p}(x) = x$.
3. $\mathbf{p}$ est la projection sur son image parallèlement son noyau.

Conclusion. Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image parallèlement son noyau.

4.3 Symétries.

Définition 29

On appelle symétrie sur $\mathbf{E}$, tout endomorphisme, $\mathbf{s}$ de $\mathbf{E}$ tel que $: \mathbf{s}^2 = \mathbf{id}_{\mathbf{E}}$.

Proposition 17

Soit $\mathbf{s}$ une symétrie de $\mathbf{E}$, on a les propriétés suivantes:

1. $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{id}_{\mathbf{E}})$ est un projecteur.
2. En posant $\mathbf{F} = \operatorname{Im} \mathbf{p}$ et $\mathbf{G} = \ker \mathbf{p}$, on a $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$ avec $\mathbf{s}(x) = \begin{cases} x & \forall x \in \mathbf{F} \\ -x & \forall x \in \mathbf{G} \end{cases}$.
   On dit alors que $\mathbf{s}$ est la symétrie par rapport $\mathbf{F}$ parallèlement $\mathbf{G}$.
3. Inversement tout projecteur $\mathbf{p}$ permet de définir la symétrie $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{id}_{\mathbf{E}}$ sur $\operatorname{Im} \mathbf{p}$ parallèlement $\ker \mathbf{p}$.

5 Matrices.

5.1 généralités.

a Trace d'une matrice carrée.

Définition 30

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, le nombre note $\mathrm{tr}(A)$, défini par la relation suivante:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 18

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes:

- $\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B).$
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

b Transposée d'une matrice.

Définition 31

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A, la matrice note ${}^tA$, définie par la relation suivante:

$${}^tA = (a_{j,i})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Proposition 19

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes:

- ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB.$
- ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.
- ${}^tP$ est inversible, avec $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

5.2 Matrices en tant qu'applications linéaires.

Remarque 6

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$$

est linéaire. Ainsi toute matrice peut être étudiée comme application linéaire, avec:

1. $X \in \ker M \iff X \in \mathbb{K}^p$ et $MX = 0$.
2. $Y \in \text{Im } M \iff Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$.
   En particulier $\text{rg}(M) = \dim \text{Im } M = \text{rg}(\text{colonnes de } M)$.
3. $\text{rg}(M) + \dim \ker M = p$ =nombre de colonnes de M.

Proposition 20

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors: M est inversible $\iff \ker M = \{0\}$
$\iff rg(M) = n$

Théorème 20

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

5.3 Matrice d'une application linéaire.

Définition 32

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice note

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

dont la j-ème colonne est forme par les coordonnes de $u(e'_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 21

Soient E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (e_i), \mathcal{B}_2 = (e'_j)$ et $E \xrightarrow{u} F$ une application linéaire. On a les propriétés suivantes:

- Si $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ alors

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i$$

- Soit $x \in E$, et X la matrice colonne forme par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et Y celle forme par les coordonnés de $y = u(x)$ dans $\mathcal{B}_2$ alors l'équation linéaire $y = u(x)$ s'écrit sous la forme matricielle
$$Y = MX.$$

Proposition 22

Avec les notations de la proposition suivante, on a les propriétés suivantes

- Si $u, v : E \longrightarrow F$ est linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v).$$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
En particulier deux applications linéaires sont gales si et seulement si leurs matrices associes dans les mêmes bases sont égales.
- Ainsi on définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre
$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}: & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$$
- Si E, F, G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ applications linéaires alors:
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$
- Si E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $E \xrightarrow{u} F$ application linéaire alors: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

5.4 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice n lignes et p colonnes note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ dont les colonnes sont formes par les coordonnés des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Proposition 23

Avec les notations de la définition précédente on a:
$$\mathrm{rg}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \mathrm{rg}(\mathcal{C})$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

5.5 Matrice de passage entre deux bases

Définition 34

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carre d'ordre n note $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ définie par:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, on a les résultats suivants:

- $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_E)$
- Soit $x \in E$, $X_1 = [x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne forme par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 = [x]_{\mathcal{B}_2}$ celle forme par ses coordonnés dans $\mathcal{B}_2$ alors:
$$X_1 = PX_2$$

Théorème 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel . $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit $u : E \to F$ linéaire. Posons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u)$, $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}'_1}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ on a les résultats suivants:

- $M = P.N.Q$
- Si u est un endomorphisme de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u), N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u), P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ alors
$$M = P^{-1}.N.P$$

Corollaire 10

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

6 déterminants.

6.1 Formes n-linéaires.

a Formes bilinéaires.

Définition 35

On appelle forme bilinéaire sur E, toute application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ linéaire par rapport l'une des variables fixant l'autre, autrement dit:

$$\begin{array}{l} \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y) \\ \varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda\varphi(x, y_2) \end{array}$$

Proposition 25

Soit φ une forme bilinéaire sur E, $(x,y) \in E^2$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants:

- $\varphi(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y) = 0$ si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

Définition 36

Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que:

- φ est symétrique si et seulement si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \quad \forall (x,y) \in E^2$.
- φ est antisymétrique ou bien alternée si et seulement si $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \quad \forall (x,y) \in E^2$.

Proposition 26

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x,y) \in E^2$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants:

- $\varphi(x,x) = 0$.
- $\varphi(x, y + \lambda x) = \varphi(x,y)$.