**CPGE My Youssef, Rabat**

# Résumé de cours: *Coniques Quadriques*

**3 janvier 2010**

***Blague du jour :***
**- Deux canards sont sur une rive, ils se regardent. L'un dit : " Coin Coin ! !" L'autre dit : " Ben merde ! J'allais dire la même chose ! !"**
**-Comment fait-on aboyer un chat ? On lui donne une tasse de lait et il la boit !**

***Mathmaticien du jour*** — ***Copernic***

**Nicolas Copernic (1473-1543) était un médecin et astronome polonais. Il est l'auteur célèbre de la théorie selon laquelle le Soleil se trouve au centre de l'Univers (héliocentrisme) et la Terre - que l'on croyait auparavant centrale - tourne autour de lui. Les conséquences de cette théorie - dans le changement profond des points de vue scientifique, philosophique et social qu'elle imposa - sont parfois baptisées révolution copernicienne. Copernic emprunte la plupart des éléments mathématiques à Ibn al Shatir, mais en changeant l'origine (le soleil au lieu de la terre).**

## 1 Coniques.

### 1.1 Équation cartésienne.

**Introduction : Une conique est l'intersection d'un cône avec un plan.**

**Equation cartésienne : La forme générale de l'équation cartésienne d'une conique est :**

$$f(x,y) = \underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{f}_{\text{Cte}} = 0$$

**Centre de symétrie : solution du système** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$

**Asymptotes : solutions de l'équation** $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, **(partie quadratique nulle).**

**Équation de la tangente : en un point** $(x_0,y_0)$, **on remplace dans l'équation cartésienne** $x^2$ **par** $xx_0$, $y^2$ **par** $yy_0$, $xy$ **par** $\dfrac{xy_0 + x_0y}{2}$, $x$ **par** $\dfrac{x + x_0}{2}$ **et enfin** $y$ **par** $\dfrac{y + y_0}{2}$.

**Équation réduite dans un repère orthonormé et paramétrage :**

- **Ellipse :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, **on pose** $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$.
- **Hyperbole :** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, **on pose** $\begin{cases} x(t) = a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases}$.
- **Parabole :** $y^2 = 2px$, **on pose** $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$.

**Comment trouver l'équation réduite dans un repère orthonormé : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice associeé à la forme quadratique.**

- **1ère étape : diagonaliser la matrice $A$ dans une b.o.n : valeurs et vecteurs propres.**
- **2èe étape : Prendre $X =^t PX_1$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (anciennes variables), $P$ matrice où on exprime les vecteurs propres dans la base initiale, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ (nouvelles variables).**
- **Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $x_1$ et $y_1$, injecter dans l'équation cartésienne initiale de la conique puis en déduire la forme réduite.**

**Genre de la conique : On discute sur $\Delta = \det A$.**

- **$\Delta > 0$, ($A$ définie positive), la conique est une ellipse si $f > 0$, un point si $f = 0$ et vide si $f < 0$.**
- **$\Delta < 0$, ($A$ définie négative), la conique est une hyperbole si $f \neq 0$ ou la réunion de deux droites si $f \neq 0$.**
- **$\Delta = 0$, ($A$ dégénérée), la conique est une parabole ou vide ou droite ou réunion de deux droites parallèles.**

**Axes de symétrie : Sont dirigés par les vecteurs propres de la matrice $A$ associés à des valeurs propres non nulles.**

## 1.2 Propriétés géométriques

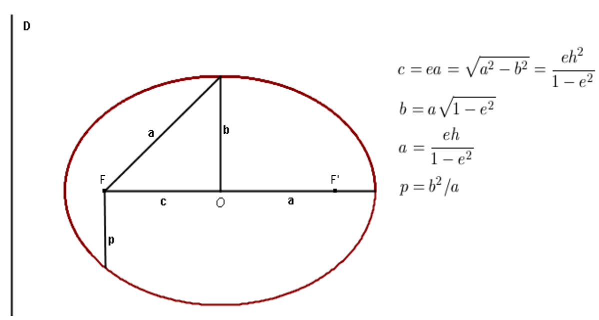
**Définition 1 . Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, $F$ un point n'appartenant pas $\mathcal{D}$ et $e$ un érel strictement positif. On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer $F$ et d'excentricité $e$ l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M$ du plan tels que :**

$$MF = ed(M, \mathcal{D})$$

- **Si $e < 1$, on parle d'ellipse.**
- **Si $e = 1$, on parle de parabole.**
- **Si $e > 1$, on parle d'hyperbole.**

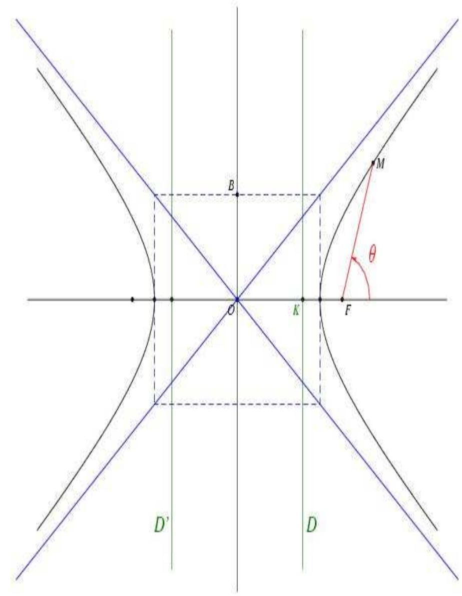
**Ellipse ($e < 1$).**

- **Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \geq b$.**
- **Paramètres :** $c^2 = a^2 - b^e$
  $c = ea$
  $p = \dfrac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \dfrac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- **Foyers : de coordonnés $(\pm c, 0)$.**
- **Directrice : d'équation $x = c + h$ et $x = -c - h$.**



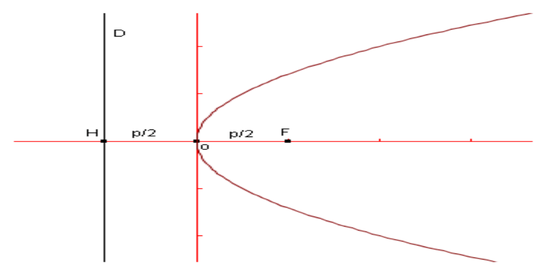
mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

**Hyperbole ($e > 1$).**




- **Équation réduite :** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$**, avec** $a \geq b$**.**
- **Paramètres :** $c^2 = a^2 + b^e$
  $c = ea$
  $p = \dfrac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \dfrac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- **Foyers : de coordonnés** $(\pm c, 0)$**.**
- **Directrice : d'équation** $x = c + h$ **et** $x = -c - h$**.**

**Parabole** ($e = 1$).




- **Équation réduite :** $y^2 = 2px$**.**
- **Foyer : de coordonnés** $(\frac{p}{2}, 0)$**.**
- **Directrice : d'équation** $x = -\frac{p}{2}$**.**

# 2 Quadriques.

## 2.1 Généralités.

**Equation cartésienne : Une quadrique est une surface de l'espace définie par équation cartésienne implicite de la forme :**

$$f(x,y) = \underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{\alpha x + \beta y + \gamma z}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\lambda}_{\text{Cte}} = 0$$

**Centre de symétrie : solution du système** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$

**Équation du plan tangent : en un point** $(x_0, y_0, z_0)$**, on utilise le principe de dédoublement : on remplace dans l'équation cartésienne** $x^2$ **par** $xx_0$**,** $y^2$ **par** $yy_0$**,** $xy$ **par** $\dfrac{xy_0 + x_0 y}{2}$**,** $x$ **par** $\dfrac{x + x_0}{2}$ **et enfin** $y$ **par** $\dfrac{y + y_0}{2}$**. De même pour les termes contenant** $z$**.**

**Remarque :**
- **L'intersection d'une quadrique avec un plan est une conique.**
- **Une quadrique de révolution est une surface obtenue par la rotation d'une conique autour de l'un de ses axes de symétrie.**
  **Exemples :**
  - **Le paraboloïde de révolution, obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.**

– **L'ellipsoïde de révolution, obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes. Il sera en forme de « ballon de rugby » si l'axe de révolution est l'axe focal de l'ellipse et en forme de « soucoupe » si l'axe de révolution est l'axe non focal de l'ellipse.**
– **L'hyperboloïde de révolution à une nappe, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non focal.**
– **L'hyperboloïde de révolution à deux nappes, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.**

## 2.2 Formes réduites.

**Cas possibles :**

| | |
|---|---|
| **1) Le paraboloïde elliptique :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$ **Si** $a=b$**, il est de révolution d'axe** $(Oz)$**.** | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=at\cos\theta \\ y=bt\sin\theta \\ z=\dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$ |
| **2) Le paraboloïde hyperbolique :** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.$ **Il n'est jamais de révolution.** | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=at\cosh\theta \\ y=bt\sinh\theta \\ z=\dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$ |
| **3) L'ellipsoïde :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ **Si** $a=b$**, il est de révolution d'axe** $(Oz)$**.** | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=a\cos\varphi\cos\theta \\ y=b\cos\varphi\sin\theta \\ z=c\sin\varphi \end{cases}$ |
| **4) L'hyperboloïde à une nappe :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$ **Si** $a=b$**, il est de révolution d'axe** $(Oz)$**.** | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=a\cosh\varphi\cos\theta \\ y=b\cosh\varphi\sin\theta \\ z=c\sinh\varphi \end{cases}$ |
| **5) L'hyperboloïde à deux nappe :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$ **Si** $a=b$**, il est de révolution d'axe** $(Oz)$**.** | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=a\sinh\varphi\cos\theta \\ y=b\sinh\varphi\sin\theta \\ z=c\cosh\varphi \end{cases}$ |
| **6) Cône elliptique :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$ | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=at\cos\theta \\ y=bt\sin\theta \\ z=ct \end{cases}$ |
| **7) Cylindre elliptique :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \\ z=t \end{cases}$ |
| **8) Cylindre hyperbolique :** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ | **Paramétrage :** $\begin{cases} x=a\cosh\theta \\ y=b\sinh\theta \\ z=t \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **9) Cylindre parabolique :** $y^2 = 2px$. | **Paramétrage :** $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \\ z = u \end{cases}$ |

**Comment trouver l'équation réduite dans un repère orthonormé : Soit** $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ **la matrice associeé à la forme quadratique.**

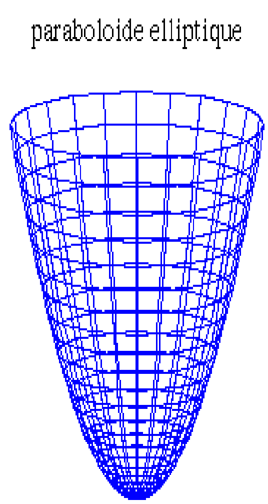
- **1ère étape : diagonaliser la matrice** $A$ **dans une b.o.n : valeurs et vecteurs propres.**
- **2èe étape : Prendre** $X =^t PX_1$ **où** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **(anciennes variables),** $P$ **matrice où on exprime les vecteurs propres dans la base initiale, et** $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ **(nouvelles variables).**
- **Exprimer** $x$, $y$ **et** $z$ **en fonction de** $x_1$, $y_1$, $z_1$, **injecter dans l'équation cartésienne initiale de la quadrique puis en déduire la forme réduite.**

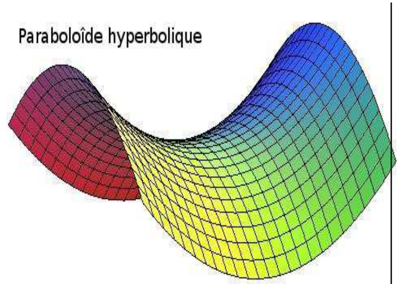
**Comment reconnaître le type de la quadrique :**

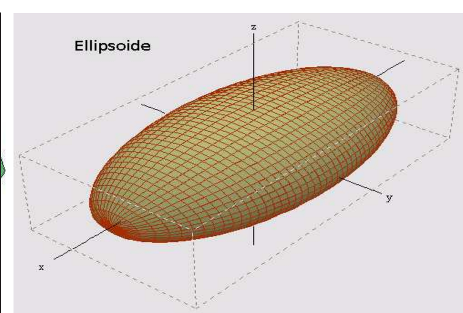
- **Si une des variables est absente, c'est un cylindre.**

  **Si la matrice** $A$ **a :**
- **2 valeurs propres égales non nulles, alors la quadrique est de révolution.**
- **3 valeurs propres strictement de même signe, on a : un ellipsoïde, un point ou le vide.**
- **2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a : un paraboloïde elliptique, un cylindre elliptique, une droite ou le vide.**
- **2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a : un paraboloïde hyperbolique, un cylindre hyperbolique, 2 plans sécants.**
- **2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a : un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône.**
- **une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a : un cylindre parabolique, 2 plans parallèles, un plan ou le vide.**

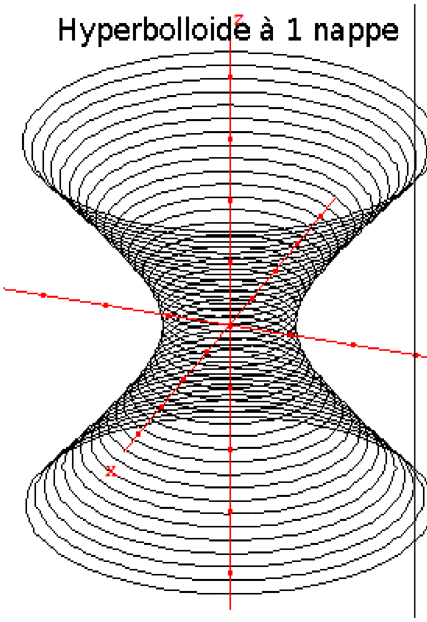
**Figures : les 9 quadriques en images.**

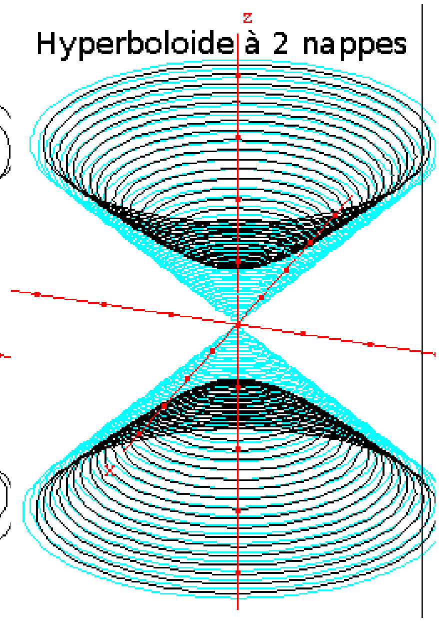


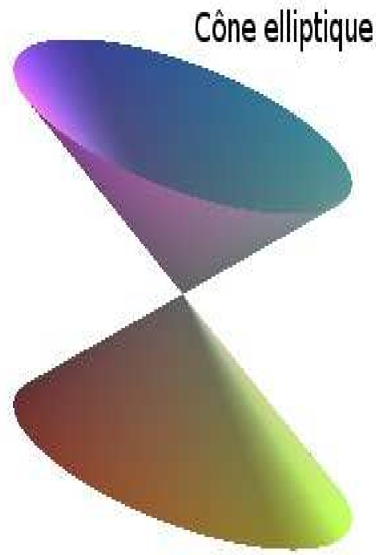



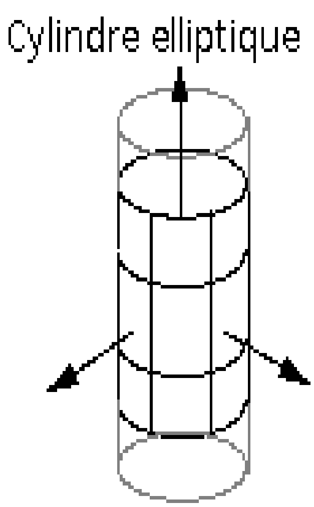



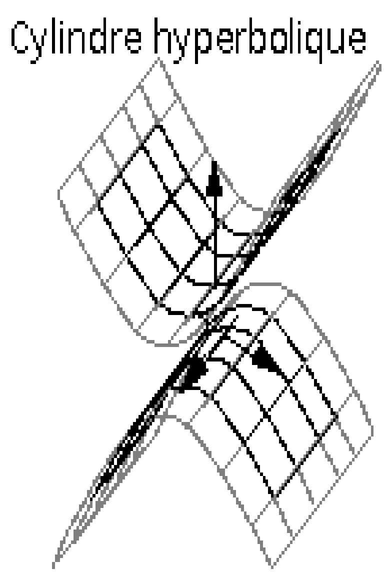
mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

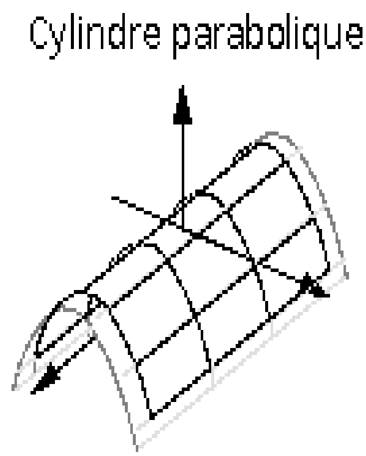



*Fin*
*À la prochaine*