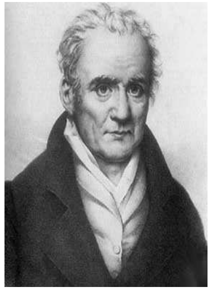
XM6-CPGE My Youssef

Résumé de cours

Courbes et Surfaces

Rabat le 3 avril 2010

Blague du jour :
Faites vous partie de la nouvelle économie ? La réponse serait oui, si :
• Quand vous perdez un copain de vue, c'est parce qu'il n'a pas d'adresse e-mail. Vous ignorez combien coûte un timbre poste.
• La plupart des blagues que vous connaissez, vous les avez reçues par mail.
• Vous venez de lire cette liste en vous répétant a chaque ligne "oui, c'est vrai ", mais vous vous demandez déjà à qui vous allez envoyer ce lien !



Mathématicien du jour **Monge**
Gaspard Monge (1746-1818), est un mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il enseigne dès l'âge de seize ans les sciences physiques. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, il participe à la création de l'École normale, de l'École polytechnique et de l'École d'arts et métiers. Sous l'égide de Bonaparte, il fût chargé de missions lors des campagnes d'Égypte et d'Italie.

Remerciements : à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

Table des matières

1 Courbes

1.1 Courbes planes

Définition

On appelle arc plan (ou courbe plane) paramétré(e) de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^2$ tout couple $(\gamma) = (I, M)$ formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application
$$M : \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$
de classe C^k.

Vocabulaire et notations. Soit $(\gamma) = (I, M)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$.

• On pose alors
$$\begin{aligned} \gamma^{(p)}(t_0) &= \frac{d^k\overrightarrow{OM}}{dt^k}(t_0) = \frac{d^kM}{dt^k}(t_0) = \overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0) \\ &= x^{(p)}(t_0)\,\overrightarrow{i} + y^{(p)}(t_0)\,\overrightarrow{j},\ \forall 0 \le p \le k \end{aligned}.$$

• Un point $M(t_0)$ de (γ) est dit **régulier** si **la vitesse** en ce point $\overrightarrow{V}(t_0) = x'(t_0)\,\overrightarrow{i} + y'(t_0)\,\overrightarrow{j}$ est non nulle.
• (γ) est dit régulier, si tous ses points son réguliers.
• Un point $M(t_0)$ de (γ) est dit **birégulier** si **l'accélération** en ce point $\overrightarrow{\Gamma}(t_0) = x''(t_0)\,\overrightarrow{i} + y''(t_0)\,\overrightarrow{j}$ est non nulle.
• (γ) est dit birégulier, si tous ses points son biréguliers.

• L'ensemble des points $\{M(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I\}$ s'appelle **support** de l'arc paramétré.

• L'application $M : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$ s'appelle **paramétrage admissible** de (γ), il est dit **normal** quand $\|\overrightarrow{V}\|(t) = 1,\ \forall t \in I$.

• On appelle **changement de paramétrage** de (γ), tout de classe $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & u = \varphi(t) \end{array}$

Dans ce cas l'application $M \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & M(u) = (x(\varphi^{-1}(u)), y(\varphi^{-1}(u))) \end{array}$ est aussi un paramétrage admissible de (γ).

• Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage est qualifiée de **géométrique**. Le support d'un arc, la régularité et la birégularité d'un point sont des notions géométriques. La vitesse en un point n'est pas une notion géométrique, alors que la droite tangente est une notion géométrique.

• Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage croissant est qualifiée de **géométrique orientée**. Le sens de parcours d'un arc est une notion géométrique orientée. Les demi-tangente sont des notions géométriques orientées.

Définitions

Soit $(\gamma) = (I, M)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$.
• On appelle abscisse curviligne d'origine $M_0 = M(t_0)$ le long de l'arc (γ) l'application $s : I \longrightarrow R$ définie par $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{V}(u)\| du$
• Soit $A = M(a)$ et $B = M(b)$ deux points de (γ), on appelle longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, le réel noté $\ell(\overset{\frown}{AB})$, défini par : $\ell(\overset{\frown}{AB}) = s(b) - s(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} \|\overrightarrow{V}(u)\| du$

Remarques :

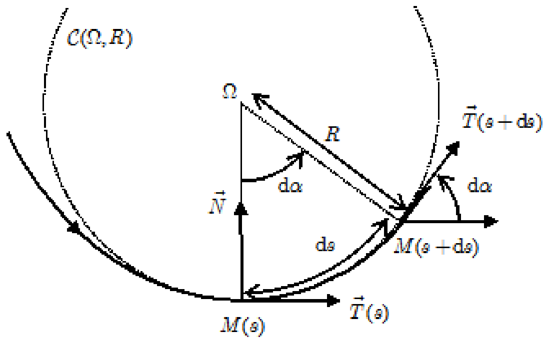
• L'abscisse curviligne et la longueur sont des notions géométriques orientées.

• Si de plus (γ) est régulier, alors l'application $s : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & s = s(t) \end{array}$ est un de classe $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et l'application $M : \begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & M(s) = (x(s), y(s)) \end{array}$ est un paramétrage normal.

• Le vecteur $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ est un vecteur unitaire tangent à (γ) au point $M(s)$ c'est une notion géométrique orientée.

Définition

• On pose $\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{T} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j}$, le repère $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est un repère orthonormé direct, appelé **repère de Frenet**.
• $c = \dfrac{d\alpha}{ds}$ s'appelle **la courbure** de (γ) au point $M = M(s)$.
• Si M est birégulier on pose :
$R = \dfrac{1}{c}$: **rayon de courbure** en M.
$\Omega = M + R\overrightarrow{N}$: **centre de courbure** en M,, situé toujours dans la partie convexe de la courbe.
$\mathcal{C}(\Omega, |R|)$: **cercle osculateur** en M.



Formules à apprendre :

• $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha,\ \dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha.$

• $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{N},\ \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\overrightarrow{T}.$

• $R = \dfrac{\|\overrightarrow{V}\|}{\det(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma})}.$

1.2 Courbes gauches

Définition

On appelle courbe gauche, tout arc paramétré à support dans $\mathbb{R}^3$, tous les notions définies pour une courbe plane sont encore valable pour celle gauche, notamment les notions de vitesse, accélération, paramétrage admissible, normal, abscisse curviligne, longueur d'un arc et orientation.

Formules à apprendre : L'arc est supposé régulier, et birégulier à partir de la 3ème propriété.

- $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$, le vecteur unitaire tangent à la courbe.
- $c = \|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\|$, la **courbure** de la courbe.
- $R_c = \dfrac{1}{c}$, le **rayon de courbure** de la courbe.
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}/\|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\|$, le vecteur unitaire normal à la courbe.
- $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$, le vecteur unitaire binormal à la courbe.
- Le repère $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est un repère orthonormé direct, appelé **repère de Frenet**.
- $\tau = \|\dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds}\|$, la **torsion** de la courbe.
- $R_\tau = \dfrac{1}{\tau}$, le **rayon de torsion** de la courbe.
- **Formules de Serret-Frenet** : $\begin{pmatrix} \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} \\ \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} \\ \dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_c} & 0 \\ -\dfrac{1}{R_c} & 0 & \dfrac{1}{R_\tau} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{pmatrix}$
- $R_c = \dfrac{\|\gamma'\|^3}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}$ et $R_\tau = \dfrac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\det(\gamma', \gamma", \gamma"')}$

2 Surfaces

2.1 Généralités

Définitions

On appelle nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^3$ tout couple $(\Sigma) = (U, M)$ formé d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et d'une application $\begin{array}{rccl} M: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Vocabulaire :

- $M(u,v)$ est appelé point courant de (Σ) de paramètre (u,v).
- L'ensemble des points courants $\{M(u,v)$ tel que $(u,v) \in U\}$ est appelé support de la nappe (Σ).
- L'application $M : (u,v) \mapsto (x,y,z)$ s'appelle un paramétrage de (Σ).
- Le point $M_0 = M(u_0,v_0)$ est dit régulier si les vecteurs $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$ ne sont pas colinéaires. Sinon on dit que le point est stationnaire.
- La nappe (Σ) est dite régulière si et seulement si tous ses points le sont.

Théorème

Si M_0 est régulier et si (γ) est un arc régulier tracé sur (Σ) passant par M_0 alors la tangente à (γ) en M_0 est incluse dans le plan π passant par M_0 et dirigé par $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$.
Ce plan π est appelé plan tangent à (Σ) en M_0. La droite perpendiculaire à π en M_0 est appelée droite normale à (Σ) en M_0.

Théorème

Si (Σ) est définie par une équation implicite de type $z = f(x,y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors au point $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, la surface (Σ) admet un plan tangent d'équation : $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y0)$.

Remarque : Pour étudier la position de ce plan tangent par rapport à la surface (Σ), on pose :

$r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t = r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0)$ (Notations de Monge).

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors (Σ) est localement au dessus de π **(point elliptique)**,
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors (Σ) est localement en dessous de π **(point elliptique)**,
- si $rt - s^2 < 0$ alors (Σ) traverse le plan π **(point hyperbolique ou point col)**,
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Théorème

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} classe 1$ et (Σ) d'équation : $f(x, y, z) = 0$. Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de (Σ) est dit régulier si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Dans ce cas, l'équation du plan tangent au point M_0 est
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Théorème

$f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, (Σ_1) et (Σ_2) d'équations respectives : $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$. Considérons $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier commun à (Σ_1) et (Σ_2) et que (Σ_1) et (Σ_2) admettent en ce point des plans tangents π_1 et π_2 non confondus.
Dans ce cas, $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2)$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ dont la tangente en M_0 est $\pi_1 \cap \pi_2$.

2.2 Surfaces usuelles

2.2.1 Cylindres

Vocabulaire. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et (γ) une courbe de l'espace.
- On appelle cylindre (Σ) de direction $\overrightarrow{u}$ engendré par (γ) la réunion des droites $(M; \overrightarrow{u})$ avec $M \in (\gamma)$.
- Ces droites sont appelées génératrices du cylindre.
- L'intersection du cylindre avec un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est appelée section droite du cylindre.

Remarque pratique : On peut former une équation cartésienne de (Σ) par élimination de t, à l'aide de la formule suivante : $M \in (\Sigma) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $M + t\overrightarrow{u} \in (\gamma)$.

2.2.2 Cônes

Vocabulaire. Soient Ω un point et (γ) une courbe de l'espace ne contenant pas Ω.
- On appelle cône (Σ) de sommetΩ engendré par (γ) la réunion des droites (ΩM) avec $M \in (\gamma)$. Ces droites sont appelées génératrices du cône.

Remarque pratique : On peut former une équation cartésienne de (Σ) par élimination de t, à l'aide de la formule suivante : $M \in (\Sigma) \Longleftrightarrow M = \Omega$ ou $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in (\gamma)$.

2.2.3 Surfaces de révolution

Vocabulaire : Soient $\Delta = (A; \overrightarrow{u})$ une droite et (γ) une courbe.
- On appelle surface de révolution (Σ) d'axe Δ engendré par (γ) la réunion des courbes obtenues par rotation de (γ) autour de Δ. C'est aussi la réunion des cercles centrés sur Δ, inclus dans des plans perpendiculaires à Δ passant par les points de (γ).
- Ces cercles sont appelés parallèles de (Σ) tandis que les intersections de (γ) avec les plans contenant Δ sont appelées méridienne de (Σ).

Remarque pratique : On peut former une équation cartésienne de (Σ) par élimination de t, à l'aide de la formule suivante : $M \in (\Sigma) \Longleftrightarrow \exists P \in (\gamma)$ tel que $AM = AP$ et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{u}$.