CPGE My Youssef, Rabat

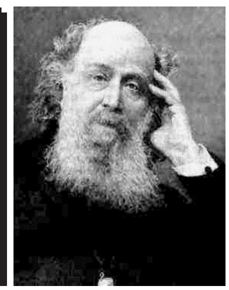
Feuille d'exercices: *Dualité en dimension finie*

28 novembre 2009

Blague du jour
• Quelles sont les fonctions les plus homogènes, mais les moins sérieuses des mathématiques ?
Réponse : les polynômes du second degré.

Mathématicen du jour ***Sylvester.***

James Joseph Sylvester (1814-1897), mathématicien et géomètre anglais. Il a travaillé avec Arthur Cayley sur les formes algébriques, particulièrement sur les formes quadratiques et leurs invariants et à la théorie des déterminants. Il a introduit le terme de matrice et la fonction indicatrice d'Euler. Il a reçu la Royal Medal et la Médaille Copley.



Dans tout le résumé $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.

1 Formes linéaires

1.1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 1 .
On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$. L'ensemble $LiE, \mathbb{K}$ des formes linéaires sur E, se note E^* et s'appelle le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension que E.

Définition 2 .
On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E, vérifiant

$$\dim H = \dim E - 1.$$

Théorème 1 .
Si H est un hyperplan de E et $x_0 \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

Théorème 2 .
- **Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.**
- **Inversement, si H est un hyperplan de E, alors il existe φ, une forme linéaire non nulle sur E, tel que $H = \ker \varphi$.**

Théorème 3 .
Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E tel que $\ker\varphi = \ker\psi$, alors $\exists\lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Remarque 1 .
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et φ une forme linéaire non nulle sur E, alors pour tout $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $\varphi(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, où $a_i = \varphi(e_i)$
Ainsi, dans une base fixe, tout hyperplan H de E a une équation de type :

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Cette équation est unique, à une constante multiplicatives près.

1.2 Base duale

Théorème 4 .
Étant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.
En particulier, le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toutes les formes linéaires sont nulles.

Théorème 5 .
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de E^*, vérifiant :

$$\begin{array}{ccccll} \varphi_i(e_j) & = & \delta_{i,j} & = & 1 & \textbf{si } i = j \quad \textbf{(Symbole de Kronecker)} \\ & & & & 0 & \textbf{si } i \neq j \end{array}$$

On pose $\varphi_i = e_i^*$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$ dans E^*

Remarque 2 .
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ dans E^*, est définie par la relation suivante : Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a : $e_i^*(x) = x_i$.

1.3 Codimension et équations d'un sous-espace vectoriel

Définition 3 .
Soit F un sous-espace vectoriel de E, sa codimension est l'entier naturel noté $\mathrm{codim}F$, défini par la relation suivante : $\mathrm{codim}F = \dim E - \dim F$.

Théorème 6 .
Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = p$, alors il existe $n - p$ formes linéaires indépendantes $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-p})$ dans E^* tel que : $F = \bigcap_{i=1}^{n} \ker\varphi_i$.

Remarque 3 .
Tout sous-espace vectoriel F de E tel que $\dim F = p$, admet $n - p$ équations indépendantes de la forme :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{n-p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n-p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Remarque 4 .
Tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E tel que $\dim \mathcal{F} = p$, admet $n-p$ équations indépendantes de la forme :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = b_{n-p} \end{cases}$$

Théorème 7 .
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de E et u l'application linéaire de E^* dans $\mathbb{K}^p$, définie par la relation suivante :

$$\begin{array}{rccl} u : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_p)) \end{array}$$

On a les résultats suivants :
- **rg**$(\mathcal{B}) =$ **rg**(u).
- $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ **est libre dans E si et seulement si u est surjective.**
- $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ **est génératrice dans E si et seulement si u est injective.**
- $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ **est une base de E si et seulement si u est un isomorphisme.**

Théorème 8 .
Soit $\mathcal{C} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ une famille d'éléments de E^* et u l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$, définie par la relation suivante :

$$\begin{array}{rccl} u : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x)) \end{array}$$

On a les résultats suivants :
- **rg**$(\mathcal{C}) =$ **rg**(u).
- $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ **est libre dans E^* si et seulement si u est surjective.**
- $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ **est génératrice dans E^* si et seulement si u est injective.**
- $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ **est une base de E^* si et seulement si u est un isomorphisme.**

Théorème 9 .
Soit $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E, on a le résultat suivant :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \Longleftrightarrow \exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p \textbf{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i$$

1.4 Applications

1.4.1 Systèmes linéaires

Théorème 10 .
Soit $(H_1, H_2, \ldots, H_p)$ des hyperplans de E, alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F \geq n - p$ et $\operatorname{codim} F \leq p$, avec égalité si et seulement si les H_i sont définis par des équations linéairement indépendantes.

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

Théorème 11 .
L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

est un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F \geq n-p$ et $\mathrm{codim} F \leq p$, avec égalité si et seulement si les équations de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes.

Théorème 12 .
L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

est un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim \mathcal{F} \geq n-p$ et $\mathrm{codim} \mathcal{F} \leq p$, avec égalité si et seulement si les équations de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes.

1.4.2 Base antiduale

Théorème 13 .
Soit $(\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une base de E^*, alors il existe une unique base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que $\varphi_i = e_i^*$.
$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'appelle la base antiduale de $(\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

2 Formes quadratiques

Dans toute la suite de ce résumé $\mathbb{K}$ désigne le corps réel $\mathbb{R}$, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.

2.1 Généralités

Définition 4 . Soit $\phi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \phi(x,y) \end{array}$

- **On dit que ϕ est bilinéaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes :**
  - $\phi(x_1 + \lambda x_2, y) = \phi(x_1, y) + \lambda\phi(x_2, y),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x_1, x_2, y) \in E^3$.
  - $\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x, y_1) + \lambda\phi(x, y_2),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (y_1, y_2, x) \in E^3$.

  Autrement dit :
  - **Pour $x \in E$ fixé, l'application partielle associée** $\phi_x : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \phi_x(y) = \phi(x,y) \end{array}$ **est linéaire.**
  - **Pour $y \in E$ fixé, l'application partielle associée** $\phi_y : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \phi_y(x) = \phi(x,y) \end{array}$ **est linéaire.**
- **On dit que ϕ est symétrique si elle vérifie la propriété suivante :**

$$\phi(x,y) = \phi(y,x),\ \forall (x,y) \in E^2.$$

  Autrement dit : $\phi_x(y) = \phi_y(x),\ \forall (x,y) \in E^2$.

Remarque 5 .

- **L'ensemble des formes bilinéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**
- **L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de celui des formes bilinéaires.**

Définition 5 .
On appelle forme quadratique sur E, toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que, l'application ϕ définie par la relation suivante : $\phi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{array}$ **soit bilinéaire.**
ϕ s'appelle forme polaire associée à q, elle est symétrique par construction.

Remarque 6 .

- **L'ensemble des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**
- **Toute forme quadratique sur E vérifie les deux propriétés suivantes :** $q(0_E) = 0$ **et** $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x),\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 14 .
Soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique, alors l'application q définie par la relation suivante : $q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \phi(x,x) \end{array}$ **est une forme quadratique sur E, vérifiant les égalités suivantes dites de polarisation :**

$$\begin{array}{rcl} \phi(x,y) & = & \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) \\ & = & \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{array}$$

Théorème 15 .
L'application qui à une forme bilinéaire symétrique ϕ associe la forme quadratique $q : x \mapsto \phi(x,x)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 16 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, et q sa forme quadratique associée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on pose

$$M = (\phi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \quad \textbf{matrice de } \phi \textbf{ dans la base } \mathcal{B}$$

Pour tout $(x,y) \in E^2$ de coordonnées respectifs $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\phi(x,y) = {}^tX \cdot M.Y \quad , \quad q(x) = {}^tX \cdot M.X$$

M s'appelle la matrice associé à ϕ et q relativement à la base $\mathcal{B}$ et se note

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$$

Théorème 17 .
Les matrices d'une forme bilinéaire symétrique ϕ et de sa forme quadratique associée q dans deux bases différentes sont équivalentes, en particulier ont même rang.
Ce rang commun s'appelle le rang de ϕ et q et se note rg(ϕ) et rg(q).
Plus précisement si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\phi)$ et $P = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$, on a :

$$M' = {}^tP \cdot M \cdot P$$

Remarque 7 . *Expressions analytiques.*
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, et q sa forme quadratique associée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on pose $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ leur matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.
Pour tout $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectifs $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}, Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} x_i y_j \\ q(x) &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

La méthode de dédoublement d'indice permet de retrouver l'expression analytique de ϕ à partir de celle de q, en remplaçant x_i^2 par $x_i y_i$ et $x_i x_j$ par $\frac{x_i y_j + x_j y_i}{2}$.

2.2 Formes quadratiques non dégénérées.

Définition 6 .
Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associée.
- **On dira que ϕ et q sont positives si et seulement si $q(x) = \phi(x,x) \geq 0, \forall x \in E$.**
- **On dira que ϕ et q sont définies si et seulement si $q(x) = \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E, \forall x \in E$.**
- **On dira que ϕ et q sont dégénerées si et seulement si $\exists x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $\phi(x,y) = 0,\ \forall y \in E$.**
- **On dira que ϕ et q sont non dégénérées si et seulement si $\forall x \in E$, on a $\phi(x,y) = 0,\ \forall y \in E \Longrightarrow x = 0_E$.**

Théorème 18 .*Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Si ϕ une forme bilinéaire symétrique positive et q sa forme quadratique associée, alors :

$$|\phi(x,y)|^2 \leq q(x) \cdot q(y)$$

Si de plus, ϕ est définie, alors on a égalité si et seulement si $\{x, y\}$ est liée.

Remarque 8 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, on a les résultats suivants :
- **ϕ est dégénérée si et seulement si $\exists x \neq 0_E$ tel que $\phi_x = 0$.**
- **Si ϕ est non dégénérée, alors l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \phi_x \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel .**

Définition 7 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associée. On appelle noyau de q le sous-espace vectoriel de E, noté $\ker q$ défini par la relation suivante :

$$\ker q = \{x \in E \textbf{ tel que } \phi(x,y) = 0\ \forall y \in E\}$$

Théorème 19 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, q sa forme quadratique associée et et M leur matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $x \in E$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les coordonnés de x dans $\mathcal{B}$, alors

$$x \in \ker q \Longleftrightarrow X \in \ker M$$

Théorème 20 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, q sa forme quadratique associée et M leur matrice dans une base fixe de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- q **est non dégénérée.**
- $\ker q = \{0\}$**.**
- $\mathbf{rg}M = n$**.**
- M **est inversible.**

2.3 Orthogonalité.

Définition 8 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associée.
- **On dit que deux éléments de E, x et y sont q-orthogonaux si et seulement si $\phi(x, y) = 0$.**
- **Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle le q-orthogonal de F, le sous-espace vectoriel de E, note $F^\perp$ ou F°, défini par la relation suivante :**

$$F^\circ = \{x \in E \text{ tel que } \phi(x, y) = 0, \ \forall y \in F\}$$

Remarque 9 .
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associée. Soit $x \in E$. Si q est en plus non dégénérée, alors

$$\phi(x, y) = 0 \ \forall x \in E \Longrightarrow x = 0_E.$$

Autrement dit : $E^\perp = \{0_E\}$.

Théorème 21 .
Toute forme quadratique q admet au moins une base orthogonale $\mathcal{B}$, dans ce cas $\mathcal{M}_q(\mathcal{B})$ est diagonale.

Théorème 22 . ***Loi d'inertie de Sylvester.***
Toute forme quadratique q, se décompose sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) - \sum_{i=1}^{q} g_i^2(x)$$

où f_i et g_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes. Le couple (p, q) est unique, s'appelle signature de q et vérifie $p + q = \mathbf{rg}(q)$.

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

Remarque 10 . ***Décomposition de Gauss d'une forme quadratique en somme de carrés.***
Soit une forme quadratique q non nulle, d'expression analytique :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

- **1èr cas : $\exists i$ tel que $a_{ii} \neq 0$, par exemple $a_{11} \neq 0$, alors**
$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1^2 + x_1B(x_2,\cdots,x_n) + C(x_2,\cdots,x_n) \\ &= a\left(x_1 + \frac{B(x_2,\cdots,x_n)}{2a}\right)^2 + C(x_2,\cdots,x_n) - \frac{B(x_2,\cdots,x_n)^2}{4a^2} \\ &= aX_1^2 + q_1(x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}$$
- **1èr cas : $\forall i a_{ii} = 0$ et $\exists i \neq j$ tel que $a_{ij} \neq 0$, par exemple $a_{12} \neq 0$, alors**
$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1x_2 + x_1B(x_3,\cdots,x_n) + x_2C(x_3,\cdots,x_n) + D(x_3,\cdots,x_n) \\ &= a\left(x_1 + \frac{C(x_3,\cdots,x_n)}{a}\right)\cdot\left(x_2 + \frac{B(x_3,\cdots,x_n)}{a}\right) + \left(D - \frac{BC}{a}\right)(x_3,\cdots,x_n) \\ &= \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right) - \frac{a}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right) + q_2(x_3,\cdots,x_n) \end{aligned}$$
  Puis on reprend la même discussion sur les coéfficients des formes quadratiques $q_1(x_2,\cdots,x_n)$ ou $q_2(x_3,\cdots,x_n)$

Fin
à la prochaine